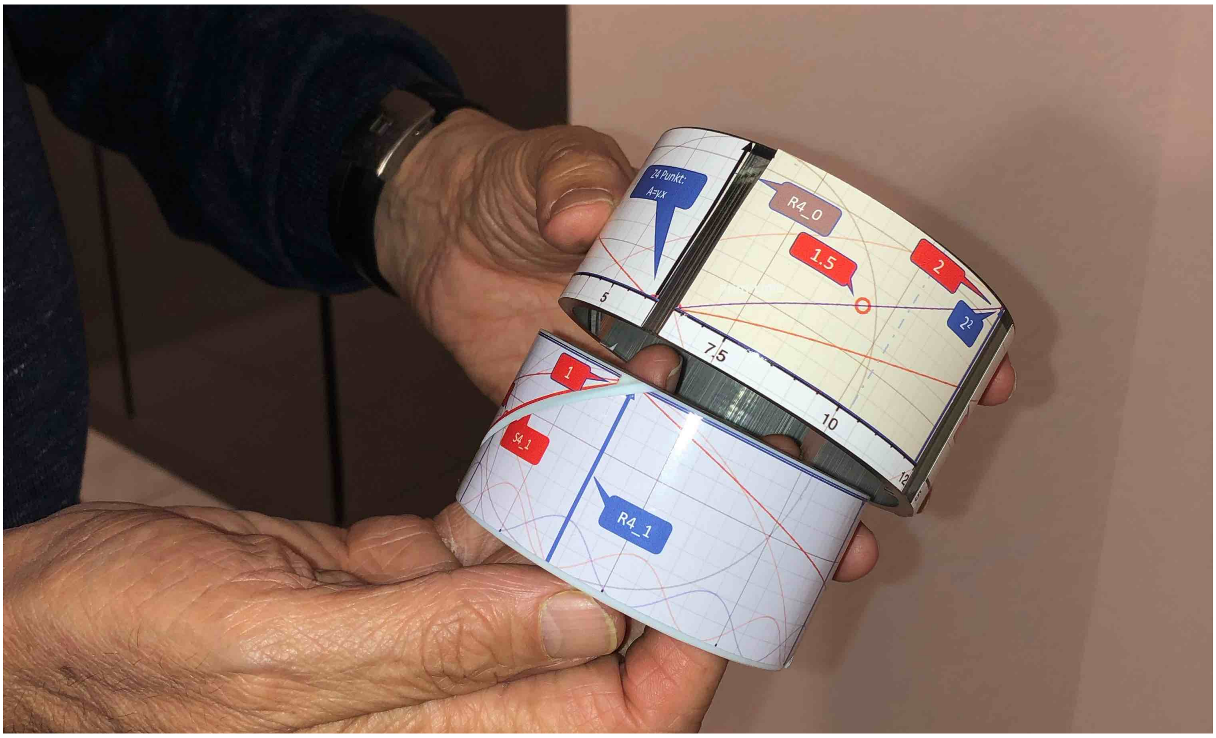
Thurgauer Forschungspreis 2021

Projekteingabe
Fachbereich Mathematik & Bildung



Primzahlen, die Eulerrolle und Goldbach

Hanspeter Zehnder, Autor

Zehnder Bildungsprojekte, 8536 Hüttwilen

Impressum

Autor	Hanspeter Zehnder
Version	7.1
Ausgabedatum	22. März 2021
Copyright	Zehnder Bildungsprojekte 2020

Hanspeter Zehnder
Zehnder Bildungsprojekte
Im Letten 2

CH-8536 Hüttwilen

www.bildungsprojekte.ch

Vielen Dank

Bei der Erstellung dieser Herleitung wurde ich von vielen Kolleginnen und Kollegen sehr aktiv unterstützt. Ohne Ihre Mitarbeit wäre das vorliegende Dokument nie zustande gekommen. Ein spezieller Dank geht an all die Kollegen, welche sich mehrfach für die Verifizierung meiner Zwischenresultate zur Verfügung gestellt haben. Ihre Rückfragen haben öfters auch Fehlüberlegungen offenbart. Vielleicht waren es genau diese Fragen, welche letztlich zu den Erkenntnissen zur Goldbachvermutung führten.

Ein spezieller Dank geht an meine Kollegen, welche die mathematischen Formulierungen verifiziert und viele Inputs geliefert haben oder mich bei der Umsetzung unterstützt haben.

Michael Kohl	Siemens AG, Wallisellen	Ingenieur
Prof. Dr. Pablo Koch	Universität Zürich	Mathematiker
Dr. Markus Spindler	Thales AG, Zürich	Mathematiker
Prof. Dr. Jörn Pachl	TU Braunschweig	Ingenieur
Ignaz Zehnder		Ingenieur
Bruno Kaufmann		Technischer Redaktor

Und ein ganz besonderer Dank geht an meine Frau Marianne für ihre Geduld.

Vorwort

Seit vielen Jahren setze ich mich mit der Frage auseinander, wie sich die betriebliche Bildung auf die Fehlerquote einer Unternehmung auswirkt. Um darüber qualifizierte Aussagen zu machen, können mathematische Modelle als Hilfsmittel eingesetzt werden. Bei den Diskussionen über dieses Vorgehen fällt auf, dass gegenüber mathematischen Modellierungen oft eine sehr zurückhaltende Position eingenommen wird. Dies, obwohl Mathematik nichts anderes ist als Mustererkennung. Interessanterweise ist aber Mustererkennung ein Lösungsansatz, welcher in vielen Berufen zum Alltag gehört. Der Jurist untersucht Vorgänge und Handlungen und vergleicht sie mit gesetzlichen Grundlagen. Lassen sich Regelverstösse erkennen, sind dies Abweichungen gegenüber einem vorgegebenen Muster. Auch der Psychologe sucht nach typischen Handlungsmustern um eine Diagnose erstellen zu können. In der Soziologie werden Teams und Organisationen untersucht. Für die Mustererkennung wird in diesem Fachbereich eine Systemtheorie eingesetzt, welche sich auch mathematisch modellieren lässt. All das ist Mathematik.

So hat auch dieses Script seine Wurzeln in einem Fallbeispiel aus der Praxis.

2006 war ich bei der Inbetriebnahme eines sicherheitsrelevanten Computersystems involviert. Mit diesem System sollte in erster Linie die Prozesssicherheit (Reduktion der Fehlerquote) verbessert werden. Um dies zu gewährleisten, musste der Lieferant eine sehr geringe Ausfallwahrscheinlichkeit nachweisen. Noch während der Inbetriebnahme gelang es dem Kunden, mit ausgeklügelten Störtests zwei Systemausfälle zu produzieren. Danach kam die Forderung nach einem massiven Preisnachlass, weil die Ausfall-Spezifikation mit grosser Wahrscheinlichkeit nicht erfüllt werden kann. Somit stellte sich die Frage, ob ein technisches System grundsätzlich gegen Störungen perfekt geschützt werden kann. Sofern dies theoretisch nicht möglich ist, wäre die Qualitätsforderung des Kunden nicht erfüllbar und damit auch der geforderte Preisnachlass unberechtigt. Aus dieser Konsequenz trägt auch der Systemeigentümer einen Teil der Sicherheitsverantwortung. Dazu gehört zum Beispiel, dass der Systemeigentümer unqualifizierte oder sogar böswillige Systemeingriffe möglichst verhindern muss. Die Praxis zeigt, dass die Anforderung bezüglich technischer Systemsicherheit sehr kontrovers diskutiert wird. Eine mathematische Modellierung könnte daher durchaus einen wertvollen Beitrag zur Diskussion «Systemsicherheit» leisten. Dieser mathematische Modellierungsversuch zum Thema «Systemsicherheit & Systemstabilität» war der Beginn dieser Arbeit im Jahr 2005. Mit der Auseinandersetzung zur Systemsicherheit offenbarten sich interessante Besonderheiten der Primzahlen sowie zu den Zahlen 1, e und π.

Zur Systemstabilität kann man sich die Frage stellen, unter welchen Bedingungen sich zwei lange Stäbe aufeinanderstellen lassen. Sofern die beiden Flächen am oberen und unteren Ende der Stäbe plan geschliffen sind, muss das möglich sein. Ist der Flächenschliff jedoch schräg, wird dieses Experiment nicht gelingen. Dem Hersteller könnte vorgeworfen werden, dass er unsorgfältig gearbeitet und ein fehlerhaftes Produkt geliefert hat. In diesem Zusammenhang kann die Frage gestellt werden, wie schlank der Stab sein kann, oder mit anderen Worten, ob die beiden Kreisflächen beliebig klein sein dürfen. Wenn nicht, so muss es eine Grenze in Bezug auf die Systemspezifikation geben. Theoretisch kann man die Frage stellen, ob man zwei Schreibstifte Spitz auf Spitz aufeinanderstellen kann. Unter der Annahme, dass die Spitze des Stiftes in einem Punkt endet, kann die Frage verneint werden. Dahinter steckt die Überlegung, dass es sich um zwei gleichwertige Stifte handelt, wobei der obere Stift um 180^0, also um den Winkel π, gedreht wird und so direkt über dem ersten Stift zu liegen kommt. Diese Drehung kann aber nicht perfekt gemacht werden, weil die Zahl π nicht teilbar ist (unendlich viele Nachkommastellen ohne periodische Wiederholungen). Damit weist die Kreiszahl π eine wichtige Eigenschaft (nicht ohne Rest durch zwei teilbar) der Primzahlen auf.

In einer frühen Phase der Modellierung liess das oben erwähnte Gedankenexperiment einen Bezug zur Goldbachvermutung erahnen. Ohne diese Entdeckung hätte ich mich nicht an das Thema «Goldbach» gewagt. Die Relevanz der Goldbachvermutung verdrängte die Ursprungsfrage immer weiter in den Hintergrund. Zunehmend dominierten Grundsatzfragen über allgemeine bekannte Rätsel der Mathematik. Mit der Verknüpfung zur Eulerrelation findet diese Arbeit einen ersten Abschluss. Weil sich hinter diesen Zusammenhängen auch Grundsatzfragen der Schulmathematik verstecken, wurde für ein einfacheres Verständnis ein patentiertes Hilfsmittel - die Eulerrolle - entwickelt. Dieses 3D-Modell dürfte daher auch für Pädagogen von Interesse sein.

Bei der Produktion der Eulerrolle war oft nicht die Darstellung einer komplexen Funktion die grosse Herausforderung, sondern die Darstellung von eher trivial erscheinenden Zusammenhängen. So gehörte z.B. die Darstellung der Zahl 1 auf der Zylinderoberfläche zu den schwierigen Fragen. Im Umkehrschluss lässt sich daraus erahnen, dass es auch sehr anspruchsvolle Aufgaben gibt, welche sich sehr einfach formulieren lassen (Goldbach).

Lesenswert sollte dieses Dokument sein, weil es nicht nur Zusammenhänge der Zahl 1, e und π aufzeigt, sondern auch Aussagen zu Primzahlen, Eulerrelation sowie zur Goldbach-vermutung enthält.

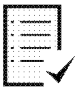
Auf die Reaktion der Fachexperten zu den Aussagen über die Goldbachvermutung bin ich besonders gespannt.

Hanspeter Zehnder

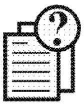
Dokumentkonventionen

Ergänzende Informationen und Hinweise

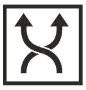
Das Symbol *i* kennzeichnet ergänzende Informationen zum vereinfachten Vorgehen.



Dieses Symbol kennzeichnet eine Erkenntnis oder eine Schlussfolgerung.



Dieses Symbol kennzeichnet eine Hypothese.



Dieses Symbol kennzeichnet eine Variante oder alternative Vorgehensweise.

Das Symbol mit den Ausrufezeichen kennzeichnet einen wichtigen Hinweis, dessen Nichtbeachtung zu Fehlschlüssen führen könnte.

Dokument History

Version	Ausgabedatum	Beschreibung
1 bis 5	Draft	Interne Entwicklungsversionen
6.0	12.12.2019	Patenanmeldung Eulerrolle (Version 6 beinhaltet nur Themen aus Kapitel 1-3)
6.0.2	01.02.2020	Verständlichkeit optimiert / Einige Textabschnitte erweitert.
7.1	22.03.2021	Eingabe «Thurgauer Forschungspreis» Erweiterung von Version 6 mit Kapitel 4 bis 8.

Inhaltsübersicht

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematik im Alltag 9

1.1 Alles ist Zahl 9

1.2 Definition und verwendete Symbolik, Mathematische Grundlagen 10

1.3 Darstellungen von Zahlen in der xy-Ebene 12

1.4 Die R-Darstellung 13

1.5 Die S-Darstellung 15

2 Die Eulerrolle, ein Modell zur 3D-Darstellung von Zahlen 21

2.1 Die Z-Darstellung 22

2.2 Die Eulerrolle 24

2.3 Die Eulerrolle – ein 3D-Körper mit 4 Dimensionen 31

3 Topologie und Zahlen auf der Eulerrolle 33

3.1 Die Konstruktion der Eulerrolle 33

3.2 Topologische Zusammenhänge 35

3.3 Zusammenfassung Kapitel 3 / Erkenntnisse 39

4 Die R-Z Transformation .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

4.1 Zahlen als Länge, Fläche oder Volumen .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

4.2 Primzahlen, Sehnen und Wurzelfunktionen **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

5 Die Skalierbarkeit der Eulerrolle .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

5.1 R → Z Transformation der Quadranten .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

5.2 Die Eulerrolle – ein 3D-Zahlenraum .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

5.3 Längen und Flächen auf der Abwicklung der Manteloberfläche .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

6 Die Eulerrelation .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

6.1 Die Zahl 1 .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

6.2 Die Zahl e .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

6.3 Die Dimension Zeit in der Modelbetrachtung .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

7 Die Goldbachvermutung .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

7.1 Rekapitulation .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

7.2 Reduktion einer Dreieckfläche auf eine 1D-Linie .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

7.3 Primzahlen die Grenzen der Teilbarkeit .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

8 Fazit und weitere mathematische Zusammenhänge .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

8.1 Zukünftige Folgearbeiten .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

8.2 Verwendete Hilfsmittel .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

8.3 Literatur- und Referenzverzeichnis .... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

1 Mathematik im Alltag

1.1 Alles ist Zahl

Fehler, Technik und Gesellschaft, sowie die Macht der Zahlen

In der Antike spielte im christlichen Kulturkreis die Naturwissenschaft lange Zeit eine untergeordnete Rolle und wurde im Mittelalter sogar eher bekämpft (Galileo). Eine Ausnahme war Augustus Hippo (354-430 n. Chr.) mit seiner Überzeugung: Alles ist Zahl.

Dieser Kirchenlehrer begründete die Erschaffung der Welt in sechs Tagen damit, das Gott für dieses Werk eine vollkommene Zahl gewählt hat. Eine vollkommene Zahl hat die Eigenschaft, dass die Summe ihrer Teiler gleich gross ist wie die Zahl. Hippo wusste bereits damals, dass die Zahl 6 die kleinste Zahl ist, welche diese Eigenschaft erfüllt (1+2+3=6). Die nächsten vollkommenen Zahlen sind 28, 496, 8128, 33550336 usw. Bis heute spielen Zahlen immer wieder eine bedeutende Rolle in der Philosophie, aber auch in der modernen Politik. Mit Zahlen kann man argumentieren, falsche Hoffnungen wecken oder Menschen zu unlogischen Handlungen verleiten. Besonders anfällig sind Menschen bei der Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten. Das begründet vermutlich auch regelmässige Casinobesuche oder die vielen Überversicherungen. Falsche Einschätzung von Risiken ist oft auch der Auslöser von politischen Diskussionen. So streiten wir zum Beispiel darüber, ob ein Wolf in der Schweiz ein zu hohes Risiko darstellt. Gleichzeitig akzeptieren wir aber pro Jahr mehr als 300 Verkehrstote in der Schweiz und mehr als eine Million weltweit. Zunehmend wird gefordert, dass Entscheidungen auf Fakten und Zahlen basieren. Trotzdem wird akzeptiert, wenn unliebsame Zahlenergebnisse bei politischen Diskussionen verzerrt, ignoriert oder sogar bestritten werden. Die daraus hervorgehenden Lügen werden dann als freie Meinungsäusserungen toleriert. Die Frage, ob Mathematik zu einer Politik mit vernünftigeren Entscheidungen etwas beitragen kann, lasse ich offen.

Gewohnt sind wir uns an den Umgang mit linearen Zahlen. Wir können gut abschätzen, wie lange eine Wegstrecke oder wie schwer eine Last ist. Handelt es sich aber um Potenzzahlen lässt uns das Gefühl schnell im Stich. So können wir uns nur schwer vorstellen, wie schnell bei einem Hochwasser eine Tiefgarage gefüllt werden kann. Gerne reduzieren wir daher Zahlenprobleme auf ein lineares System, so als ob wir alles auf einem Massstab abbilden könnten. Das dem nicht so ist, zeigt bereits das Beispiel $\sqrt{1} = -1$.

Um diese Gleichung zu erklären, sind Kenntnisse des imaginären Zahlenraums erforderlich. Noch komplexer wird es, wenn Zusammenhänge in der dritten Dimension erklärt werden müssen. Auch wenn Begriffe, wie Kraft oder Drehmoment zur Alltagssprache gehören, ist uns oft nicht bewusst, dass hinter diesen Grössen Vektorberechnungen stecken, welche sogar den Einbezug einer dritten Raum-Dimension erfordern. Überraschend mag auch die Erkenntnis sein, dass eine Systemfehlerquote eine Korrelation zu Primzahlen hat (s. Vorwort).

Dass eine Primzahl nur durch 1 und sich selber geteilt werden kann, ist zwar gut bekannt, aber viele Eigenschaften von Primzahlen sind schwer verständlich oder sogar ungelöst.

In diesem Script kommen der Vektorgeometrie und der Topologie eine grosse Bedeutung zu. Da auch rotierende Vektoren betrachtet werden, kommen trigonometrische Berechnungen sowie bekannte Transformationen der Analysis zur Anwendung. Besonderheiten von rotierenden Vektoren im 3D-Raum, können auf einer Kugel- oder Zylinderoberfläche aufgezeigt werden. In dieser Arbeit wird dazu eine Dose mit einem ausdrehbaren Deckel vorgestellt. Damit können auch Erkenntnisse zur Eulerrelation und Goldbachvermutung aufgezeigt werden. Daher wird diese Dose als «Eulerrolle» bezeichnet.

1.2 Definition und verwendete Symbolik, Mathematische Grundlagen

Zahlen können unterschiedlich dargestellt werden. Vertraut ist die Darstellung der Zahlen auf einer Geraden. Mit dieser Abbildung wird jede Zahl als eindimensionale Grösse, zum Beispiel als Längenmass, abgebildet. Eine differenziertere Aussage über einen Zahlenzusammenhang ist in einem imaginären Zahlenraum (2D-Fläche) möglich. Hier können Zahlen als Vektoren in einer xy-Ebene abgebildet werden. Dabei kann jeder Vektor über seine Länge und seine Phasenlage definiert werden. Dazu kommt, dass in einer Ebene unterschiedliche Vektordarstellungen möglich sind. So können Zahlen mit einem Radiusvektor (R-Darstellung) oder mit einem Sehnenvektor (S-Darstellung) abgebildet werden. Nebst der Darstellung in der xy-Ebene wird für die Zahlendarstellung auch noch eine Z-Darstellung eingeführt. Diese stellt die Zahlen in einem xyz-Raum dar. Wichtig ist, dass jede Darstellung bzw. Abbildungsform in eine andere Form überführt werden kann. Daher müssen die aufgezeigten Darstellungsvarianten zueinander bijektiv abbildbar sein. Damit die Darstellungsvarianten klar definiert sind, werden in diesem Script, nebst den üblichen mathematischen Symbolen, spezielle Symbole und Abkürzungen verwendet.

Mit der Einführung der Z-Darstellung, welche Zahlenzusammenhänge im 3D-Raum (Zylinderoberfläche) abbildet, wird ein zusätzliches Symbol φ für den Phasenwinkel eingeführt. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass auf einer gekrümmten Oberfläche die Winkel- und Phasentreue verloren geht. Damit können Verwechslungen zwischen dem Vektorwinkel der R- und S-Darstellung (imaginärer Zahlenraum) und dem Vektorwinkel in der Z-Darstellung (3D-Raum) vermieden werden.

Abkürzungen und Symbole

Symbol	Beschreibung
R	R steht für R-Darstellung. In dieser Darstellung werden Punkte auf einem Kreisumfang mit einem Radiusvektor abgebildet. R4 bedeutet: Kreisradius = 4
S	S steht für Sehnendarstellung. Punkte auf einem Kreisumfang werden mit einem Sehnenvektor abgebildet. S2 bedeutet: S-Darstellung auf einem Kreis mit r = 2
Z	Z steht für Manteldarstellung. Zahlen werden auf einer Zylinderoberfläche abgebildet. Im Gegensatz zur zweidimensionalen R- und S-Darstellung, kann die Z-Darstellung als 3D-Variante mit einem x-, y- und z-Anteil verstanden werden.
∠	Phasenwinkel eines R- oder S-Vektors Bei der R- und S-Darstellung gilt die x-Achse als Referenzwert (Phasenwert = 0). Beispiel $R4\angle\frac{\pi}{2}; R\text{-}Vektor\ mit\ Länge = 4\ und\ Phase\ \frac{\pi}{2}$
→	Transformationszeichen zwischen verschiedenen Darstellungsvarianten. Jede Zahl n kann von der R- in die S- oder Z-Darstellung transformiert werden. Beispiele: $R \rightarrow S$ bedeutet: Die Darstellung einer Zahl n wird von der R-Darstellung in eine S-Darstellung transformiert.

n	natürliche Zahl, $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$
π	Mass für den Phasenwinkel eines R- oder S-Vektors. Musterbezeichnung für einen Vektor $R4\angle\frac{\pi}{2}$: R steht für Radiusvektor, 4 für die Vektorlänge und $\frac{\pi}{2}$ für den Phasenwinkel zwischen der x-Achse und dem R-Vektor Musterbezeichnung für einen Vektor S4$\angle\frac{\pi}{4}$: S steht für Sehnenvektor, 4 für den Kreisradius und $\frac{\pi}{4}$ für den Phasenwinkel zwischen der x-Achse und dem S-Vektor
φ	Phasenwinkel eines Vektors auf einer Zylinderoberfläche. Wird ein R- oder S-Vektor in die Z-Darstellung transformiert, wird zur Differenzierung der Phasenwert eines transferierten Vektors nicht mehr mit dem Symbol π, sondern mit dem Symbol φ angegeben. Musterbezeichnung für einen Vektor R4$\angle\frac{\varphi}{2}$: R steht für einen R $\rightarrow Z$ transformierten Radiusvektor, 4 für die Vektorlänge und $\frac{\varphi}{2}$ für einen Abstand zwischen der x-Achse und einem Vektor, welcher senkrecht auf der x-Achse steht. Musterbezeichnung für einen Vektor S4$\angle\frac{\varphi}{4}$: S steht für einen S $\rightarrow Z$ transformierten Sehnenvektor, 4 steht für eine Referenzpunkt Z4 (allgemein Zn-Punkt) in der Z-Darstellung.
2n (2n-1)	gerade Zahl ungerade Zahl
P	Primzahlen und Zahlen mit Primcharakter Zahlen mit Primcharakter sind Zahlen mit Primeigenschaften, die aber trotzdem nicht als Primzahl definiert sind. Beispiel: 1, e, π**.** Diese Zahlen sind nur durch sich selbst teilbar was eine wichtige Primeigenschaft ist. Sie können auch als unechte Primzahlen bezeichnet werden.
Prim	Synonym für Primzahl P und unechte Primzahlen
$\mathcal{L}_y$	Längeneinheit, Mass für Additionsanteil eines Vektors: 1 $\mathcal{L}_y$ = 1 = Referenzeinheit
$\mathcal{L}_x$	Längeneinheit, Mass für den Multiplikationsanteil eines Vektors 1 $\mathcal{L}_x = \pi$ Einheit für Winkelmass bzw. Multiplikationsanteil
$\mathcal{L}_z$	Längeneinheit, Mass für Z-Anteil eines Vektors im 3D-Raum 1 $\mathcal{L}_z$ =1 $\mathcal{L}_y$ (Gleiches Mass, andere Richtung. Substitution $\mathcal{L}_z$ *durch* $\mathcal{L}_y$ möglich
$\mathcal{L}_t$	Längeneinheit, Mass für Zeiteinheit Bewegungsdauer eins Vekors im 3D-Raum 1 $\mathcal{L}_t$ =1 $\mathcal{L}_\pi$ (Gleiches Mass, andere Einheit) Substitution $\mathcal{L}_t$ *durch* $\mathcal{L}_x$ möglich

A	Additionsanteil (Vektorlänge) eines Vektors. Der Additionsanteil wird auch durch den Amplitudenwert einer sin- oder cos-Schwingung abgebildet.
M	Multiplikationsanteil eines Vektors. (Vektorphase)
$m = \frac{A}{M}$	Steigung m einer xy-Diagonallinie oder eines Vektors. Beispiel: Dem Vektor S4$\angle\frac{\pi}{4}$ kann ein Additionsanteil y=4 und ein Multiplikationsanteil M= 4 zugeordnet werden. Dieser Vektor hat ein $\frac{A}{M}$ Verhältnis von $\frac{1}{1}$ und der Vektor liegt auf einer Linie mit der Steigung $m = 1$

1.3 Darstellungen von Zahlen in der xy-Ebene

Grundsätzlich gilt: Eine Zahl kann man sich als Strecke mit einer bestimmten Länge vorstellen.

Diese Darstellung ist eine eindimensionale Zahlenabbildung.

Eine Zahl kann nebst einer Länge auch eine Fläche oder ein Volumen beschreiben. Das zwischen diesen Darstellungen ein Zusammenhang besteht, ist an einem Quadrat erkennbar. So kann eine Strecke von 4 m zu einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 m gefaltet werden und für einen Würfel können sechs Flächen à 1 m^2 zu einem Würfel von 1 m^3 gefaltet werden.

Werden Zahlen statt auf einem Lineal auf einem Kreisumfang dargestellt, lässt sich die ein- und zweidimensionale Darstellung von n^1- und n^2 -Zahlen kombinieren. So kann der Kreisumfang als eindimensionale Länge betrachtet werden und die Kreisfläche welche mit $r^2\pi$ bestimmt wird als Flächenzahl $k \cdot n^2$. Im imaginären Zahlenraum kann der Kreisumfang (n^1- Zahl) in vier Abschnitte unterteilt werden.

Dabei kann einem Punkt auf der +y-Achse ein imaginärer Wert j zugeordnet werden.

Ein Punkt auf der -x-Achse kann eine negative Zahl oder eine halbe Umfanglänge abbilden.

Ein Punkt auf der +x-Achse kann eine volle Umfanglänge oder eine Kreisfläche abbilden.
Bei einem Kreis mit dem Radius $r = 4$ können diese Punkte mit einem Radiusvektor oder einem Sehnenvektor abgebildet werden.

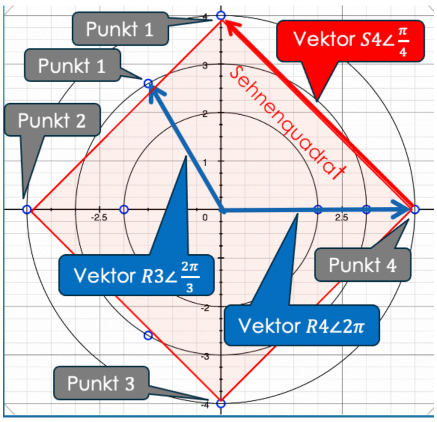


Bild 1: Zahlendarstellung in der xy-Ebene

Je nach Kreisradius und Phasenwinkel können die Punkte mit verschiedenen Vektoren abgebildet werden. Aus der Vektorbeschreibung ($R4\angle\pi$ oder $S4\angle\frac{\pi}{4}$) geht hervor, dass man jedem Vektor eine Vektorlänge und einen Phasenwinkel und damit eine Flächenzahl $A \cdot M = R\boldsymbol{n} \cdot x\pi$ oder $S\boldsymbol{n} \cdot x\pi$ zuordnen kann.
Dem S-Vektor $S4\angle\frac{\pi}{4}$ kann auch eine Seitenlänge $4\sqrt{2}$ zugeordnet werden, mit welcher die Fläche des Sehnenquadrates $(4\sqrt{2})^2$ = $2 \cdot 4^2$ berechnet werden kann.

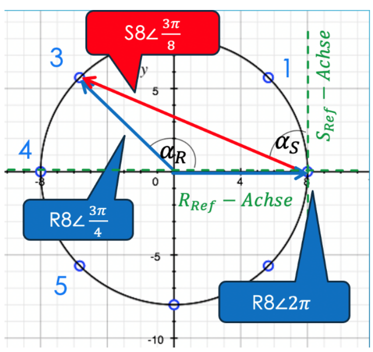
Dass es zu jeder Fläche eine passende Umfanglänge geben muss, ist auch ohne mathematische Herleitung nachvollziehbar. Trivial ist diese Beziehung trotzdem nicht, vor allem nicht im 3D-Raum mit Linien-, Flächen- und Volumen-Beziehungen.
Bereits bei eindimensionalen Grössen ist man sich oft zu wenig bewusst, dass eine Quadratzahl n^2 nur über Umwegen auf einem Lineal abgebildet werden kann, weil die Winkelsumme eines Quadrates nur über einen Transformationsprozess in eine Länge umgewandelt werden kann. Ohne diesen Prozess können auf einem Masstab Längen nur multipliziert aber nicht quadriert werden.

Ersichtlich ist dies am Beispiel vom Sehnenquadrat in Bild 1. Der Umfang kann zwar der Quadratfläche zugeordnet werden. Entsprechend ist die Aussage, dass eine Quadratfläche mit einer Quadratumfanglänge abgebildet werden kann korrekt, setzt aber voraus, dass die Umfanglänge kohärent zur entsprechenden Flächenzahl ist. Kohärent heisst in diesem Sinne, dass zwischen der Länge $4.4\sqrt{2}$ und der Fläche 4^2 eine eindeutige Beziehung besteht, welche eine bijektive Abbildung zwischen der 1D und 2D- Abbildung ermöglicht. Das heisst auch, dass die Winkelsumme des Quadrates mit einem Phasenanteil von 2π in eine Länge mit einem Phasenanteil Null transformiert werden kann. Um das zu ermöglichen, kann eine Einheitslänge mit der Einheit $\mathcal{L}_y$= 1 definiert werden. Sinnvollerweise wird diese Länge dem Einheitsvektor mit dem Radius $r = 1$ zugeordnet.

Analog dazu kann auch eine Einheitsphase mit der Einheit $\mathcal{L}_x = \pi$ definiert werden. Auch diese Einheitsphase kann dem Einheitskreis zugeordnet werde. Der Phasenwert π dreht somit den Einheitsvektor um genau 180.

Alle Punkte auf den Umkreisen lassen sich mit einem Radiusvektor oder einem Sehnenvektor beschreiben, wobei jeder R- und S-Vektor durch seine Vektorlänge x$\mathcal{L}_y$ und Vektorphase y$\mathcal{L}_x$ bestimmt ist. Allerdings gelten Randbedingungen, welche einen Gültigkeitsbereich definieren. So ist zum Beispiel die Länge innerhalb eines Kreises eine Konstante und damit unabhängig von seinem Phasenwert.
Der Phasenwert eines R-Vektors kann sich im Bereich $-\infty \ldots\ldots +\infty$ bewegen. Lässt man diese Unbegrenztheit zu, geht jedoch die Eindeutigkeit verloren, weil bei einer Phasendrehung von mehr als 2π Vektorüberlagerungen vorkommen. Um das zu verhindern, ist es sinnvoll, wenn auch ein Gültigkeitsbereich für den Phasenwert eingeführt. Beim Phasenwert macht es Sinn, wenn eine Bandbreite $2r\pi$ (= Umfanglänge) als Grenzwert definiert wird. Mit diesem Phasen-Gültigkeitsbereich wird jede Vektordrehung, unabhängig von der Vektorlänge, auf 360^0 begrenzt.

1.4 Die R-Darstellung



Auf einem Umkreis mit r = 8 können mit dem Radiusvektor acht ganzzahlige Punkte abgebildet werden. Zudem gilt, dass eine bijektive Abbildung zwischen den verschiedenen Darstellungen möglich sein muss.

Bild 2: Beispiel Kreis mit Radius r = 8

Vektor $R8\angle\frac{3\pi}{4}$

Ein Punkt auf einem Umkreis ist auch durch eine Vektorlänge und einen Phasenwinkel α_r eindeutig bestimmt,

Für die Beschreibungsvariante $R8\angle\frac{3\pi}{4}$ gilt:

- R steht für Radiusvektor mit der Vektorlänge r = 4 (Additionsanteil = 4)
- $\angle\frac{3\pi}{4}$ steht für Vektorphase mit Bezug auf x-Achse (Phasenanteil = $\frac{3\pi}{4}$) ($R_{Ref} - Achse$)

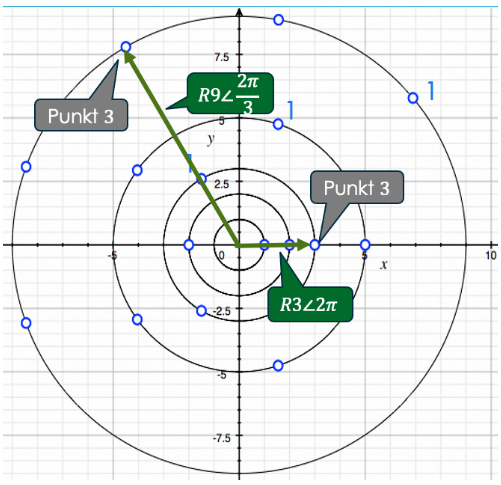
Transformation von Rn → Rm Darstellung

Ein Vorteil der R-Darstellung liegt darin, dass Berechnungen mit sehr grossen Zahlen einfacher abschätzbar werden. Geht man davon aus, dass einer Zahl «n» eine bestimmte Bogenlänge zugeordnet werden kann, dann können auf einem grossen Kreis mehr Zahlen abgebildet werden als auf einem kleinen Kreis. Der Gültigkeitsbereich einer Abbildung vergrössert sich somit mit zunehmendem Kreisradius.

Jede Vektorspitze bildet einen bestimmten Punkt bzw. eine bestimmte Zahl ab. Diese Zahl kann auf verschiedene Kreisradien transformiert werden.

Beispiel:

$$R3\angle 2\pi \rightarrow R9\angle\frac{2\pi}{3}$$



Der kleinste Kreis, welcher für die nachfolgenden Betrachtungen in Erwägung gezogen wird, ist der Einheitskreis. Dieser bildet mit dem Radiusvektor die Einheitslänge 1^1 $(auf\ der - x\ Achse)$ und die Einheitsphase π ab. Quadriert man die Einheitslänge, wird auf der $+x\ Achse$ die Einheitsfläche 1^2 abgebildet.

Auf dem Einheitskreis können in der R-Darstellung nur die Zahlen kleiner 1^2 überlagerungsfrei dargestellt werden. Alle grösseren Zahlen weisen einen Phasenwert von $> 2\varphi$ auf und führen zu Punkt-Überlagerungen auf dem Kreisumfang.

Bild 3: Darstellung der Zahl 3 in der in R3- und R9-Darstellung

Beschränkt man sich auf die natürlichen Zahlen, können auf einem Kreis mit dem Radius r = 3 nur die Punkte 1, 2 und 3 dargestellt werden. Entsprechend können auf der R9-Darstellung die Punkte 1 bis 9 dargestellt werden. Zahlen können von einer Rn_n- in eine Rn_m-Darstellung transformiert werden (bijektive Transformation).

Es gilt folgende Transformationsregel:

$$R3\angle 2\pi \rightarrow R9\angle \frac{2\pi}{3}$$

oder allgemein formuliert:

$$Rn_1\angle 2\pi \rightarrow Rn_2\angle \frac{2\pi}{n_1}$$

Diese allgemeine Formel hat als Bedingung: $n_1 \neq 0$
Die hier verwendete Menge $n \in \mathbb{N}$ schliesst also die Zahl Null aus.

i Wird eine Zahl in der R-Darstellung abgebildet, ist der Phasenwert umgekehrt proportional zur Vektorlänge. Dabei bildet die Vektorlänge den Radius und die Vektorphase die Vektordrehung und damit die Bogenlänge ab.

1.5 Die S-Darstellung

Im Unterschied zur R-Darstellung ist bei der S-Darstellung die Vektorlänge kein konstanter Wert. Das heisst, bei einer S-Darstellung ändert sich mit dem Phasenwinkel auch die Vektorlänge.

Analog zur R-Darstellung können Sehnenvektoren mit Länge und Phasenwert beschrieben werden (Bild 2). Verwendet man die gleiche Notation wie bei der R-Darstellung, gelten für die S8-Darstellung folgende Bezeichnungsvarianten:

Vergleich zwischen R- und S-Darstellung für den Punkt 2 auf dem Umkreis r=8 (Bild 2):

- Für Punkt 2 auf dem Umkreis gilt: R8$\angle \frac{\pi}{2}$
- Für Punkt 2 auf dem Umkreis gilt: S8$\angle \frac{\pi}{4}$

- Bei der R-Darstellung ist der Phasenwinkel doppelt so gross wie bei der S-Darstellung.
- Die S-Vektorlänge ist abhängig von der S-Phase und ist abhängig vom Phasenwinkel.

Ansatz / Hypothese:
Die Vektordrehung kann als Multiplikation und die Radiuslänge als Additionsanteil interpretiert werden.
Bei jedem Rn-Vektor ist der A-Anteil eine Konststante (n). Liegt der Vektor auf der y-Achse, ist ein minimaler Phasenanteil von $\frac{n\pi}{2}$ gefordert ($\frac{D\pi}{4}$; $\frac{1}{4}Umfang$).

Ein S$n - Vektor$ bildet näherungsweise einen Kreisbogen und damit eine Länge ab. Damit besitzt jeder Sn-Vektor einen Additionsanteil (A).

Der Multiplikationsanteil (M) eines Sn-Vektors wird durch einen Winkel α bestimmt. Null ist der Phasenwinkel, wenn der S-Vektor auf der $S_{Ref} - Achse$ liegt. (s. Bild 2)

Besonderheit

Das Längenmass $\mathcal{L}_y$ referenziert auf die y-Achse und damit auf die Länge des j-Vektors.

Die j-Wert (Imaginärteil) ist eine Projektion des Vektors auf die y-Achse, welche mit einer sin-Funktion beschrieben werden kann. Beim Realteil wird diese Projektion mit der cos-Funktion beschrieben. Somit können in der R-Darstellung auf der x- und y-Achse die Vektorlängen abgebildet werden. Die Maximalwerte der Projektionen erfolgt immer bei den sin- und cos-Wendepunkten (bzw. bei den Nullstellen der sin- und cos-Funktionen).

Das Bogenmass und damit auch das Winkelmass des S-Vektors kann nicht in der Einheit $\mathcal{L}_y$ angegeben werden, weil der Phasenwinkel π nicht gradzahlig teilbar ist. Die Zahl π weist damit eine typische Primeigenschaft auf.

Für den Phasenwinkel wird daher eine eigene Einheit $\mathcal{L}_y = 1\pi$ eingesetzt.

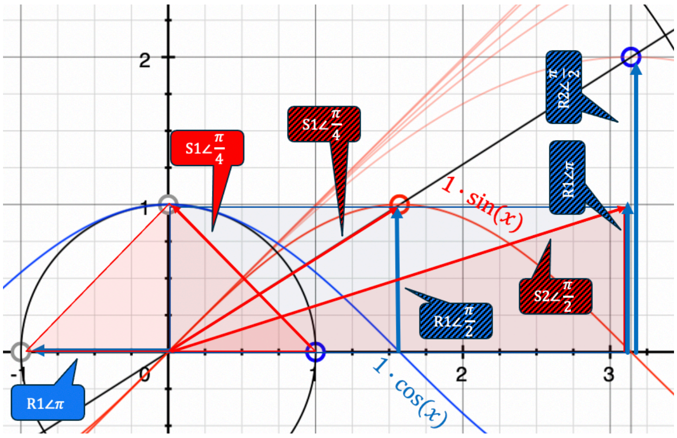
Die Flächenzahl: Ein Produkt von $n\mathcal{L}_y \cdot n\mathcal{L}_x$

Ein R- oder S-Vektor kann somit auch als Fläche mit den beiden Einheiten $\mathcal{L}_x$ und $\mathcal{L}_y$ interpretiert werden. So kann zB. der Vektor $R1\angle 2\pi$ als Produkt $1\mathcal{L}_y \cdot 2\mathcal{L}_x$ = 1. 2π verstanden werden.

Die Schreibweise $R2n\angle 2\pi$ zeigt, dass in der R-Darstellung jede gerade Zahl auf der x-Achse liegt: (cos(nπ) ist immer 1. Andererseits liegt der j-Vektor einer Zahl immer bei der Nullstelle der cos-Funktion (beim j-Vektor ist sin($\frac{\pi}{2}$) immer 1).

Damit gibt es bei der R4-Darstellung auf der j, -x, -j und der +x-Achse einen Punkt, also für jedem Quadranten eine Zahl.

Diese Zahlen können somit auch in einer xy-Ebene in Form von sin- und cos-Funktionen abgebildet werden. Der Vorteil dieser Abbildung liegt darin, dass der Additionsanteil A (Amplitudenwert) in y-Richtung und der Phasenanteil M (Multiplikationsanteil) in x-Richtung abgebildet wird. Diese Aufteilung erleichtert die Zahlenanalyse, weil damit die A- und M-Überlagerungen, wie sie bei der R-Darstellung vorkommen, vermieden werden können.



Nebenstehende Abbildung zeigt, dass neben der R- und S-Darstellung eine weitere Möglichkeit zur Darstellung von Zahlen besteht.

In der xy-Ebene können Zahlen auch als Punkt auf einer sin- oder cos-Kurve dargestellt werden. Dabei kann in y-Richtung die Vektorlänge ($\mathcal{L}_y$) und in x-Richtung die Vektorphase $\mathcal{L}_x$ aufgetragen werden.

Bild 4: R-, S- Darstellung sowie cos-/sin-Abbildung.

Als Alternative zur R- und S-Darstellung kann eine Zahl auch auf einer xy-Ebene abgebildet werden, bei welcher in y-Richtung der Additionsanteil $n\ \mathcal{L}_y$ und in x-Richtung der Multiplikationsanteil $n\ \mathcal{L}_x$ abgebildet wird.

Da jede Zahl n mit einem R- oder S-Vektor beschrieben werden kann, muss auch jede Zahl n einen R-Vektor mit Additionsanteil n^1 aufweisen, da diese Länge für die korrekte Abbildung des j-Vektors erforderlich ist.

Dividiert man den Phasenwert des Vektors $R1\angle\pi$ durch 2, wird der Vektor im Uhrzeigersinn auf die y-Achse gedreht, es resultiert ein j-Vektor mit der Länge 1 $\mathcal{L}_y$. Dieser Vektor auf der y-Achse besteht offensichtlich aus einer Länge 1 (R1) welchem ein Phasenwert bzw. eine Bogenlänge von $\frac{\pi}{2}$ zugeordnet werden kann. Eine Aussage über die Krümmung der Bogenlänge ist nicht möglich, da nur ein Anfangspunkt und ein Endpunkt der Bogenlänge bekannt ist (ungenügende Auflösung).

Der Anfangspunkt der Bogenlänge ist mit $1 \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und der Endpunkt mit $1 \cdot cos(\pi)$ bestimmt. Dabei wird die Vektorlänge $1\mathcal{L}_y$ als Additionsanteil A definiert und der Vektorwinkel $\pi = 1\mathcal{L}_x$ wird als Multiplikationsanteil M definiert.

Weiter gelten die Transformationen:

$$R1\angle 2\pi \ \rightarrow \ R4\angle\frac{\pi}{2} = \ R1\angle\frac{\pi}{2} + R1\angle\frac{\pi}{2} + R1\angle\frac{\pi}{2} + R1\angle\frac{\pi}{2}$$

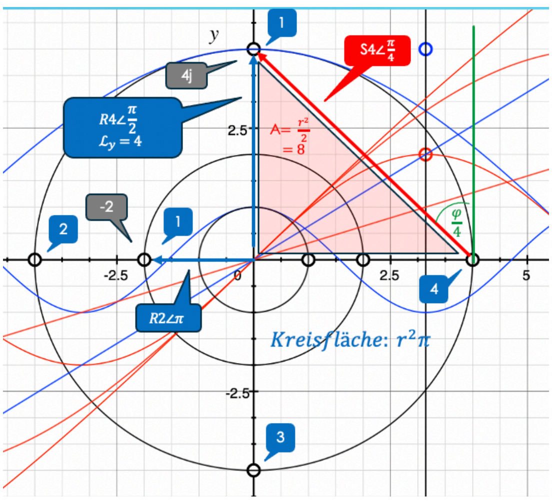
Die vier $R1\angle\frac{\pi}{2}$ - Vektoren lassen sich grundsätzlich zu einem Einheitsquadrat mit Seitenlänge 1^1 und Winkelsumme 2π falten.

Zudem kann jeder R- oder S-Vektor als Produkt n ($\mathcal{L}_x \cdot \mathcal{L}_y$) geschrieben werden. Dabei bildet $\mathcal{L}_x \cdot \mathcal{L}_y = \pi$. 1 das kleinstmögliche Produkt ab. (Einheiten $\mathcal{L}_y$ und $\mathcal{L}_x$ sind nicht weiter teilbar).

$1 \cdot \pi$ kann somit als kleinstmögliche Flächenzahl interpretiert werden und ist mit dem Vektor $R1\angle\varphi$ bestimmt. Dieser Vektor liegt in der R-Darstellung auf der -x-Achse und bildet die Zahl der halben Einheitsfläche 1^2 ab. Der Punkt auf der -x-Achse kann daher als

Flächenmass 0,5 * $R1\angle 2\pi$ interpretiert werden. Als Durchmesser liegt der R1-Vektor auf einer Nulllinie 1 und kann als Streckenlänge $(n^1 - Zahl)$ interpretiert werden. Ein einziger Punkt auf der -x-Achse ist referenzlos und kann frei definiert werden.

R-Vektoren bilden grundsätzlich Flächenzahlen (n^2) ab, wobei eine Flächenzahl auch als Vielfaches einer Länge und somit als reine Länge $(n^1 - Zahl)$ abgebildet werden kann. In der R-Darstellung bildet ein $Rn\angle 2\pi$ Vektor immer eine Quadratzahl ab, welche aber auch als n^1-Vektor, bestehend aus vier Teillängen $4 \cdot \frac{n}{4}$ interpretiert werden kann. Dreht man einen $Rn\angle 2\pi$ Vektor auf die -x-Achse, wird der Phasenwert halbiert ($\frac{Rn\angle 2\pi}{2}$ = $Rn\angle\pi$). Dieser Vektor bildet in der R-Darstellung eine negative Zahl ab und kann durch eine zusätzliche Phasenhalbierung auf die y-Achse gedreht werden ($Rn\angle\frac{\pi}{2}$). Dieser Vektor bildet daher die Zahl $\frac{n}{4}$ ab. Addiert man vier $Rn\angle\frac{\pi}{2}$ – Vektoren, entsteht ein Vektor der Länge $4n\mathcal{L}_y$.



Am Beispiel der beiden Vektoren $R4\angle\frac{\pi}{2}$ und $S4\angle\frac{\pi}{4}$ kann der Bezug von Vektorlänge und Kreisfläche aufgezeigt werden.

Auf dem Umkreis r=4 können die Punkte 1 bis 4 dargestellt werden. Die Vektorspitze von $R4\angle\frac{\pi}{2}$ bildet dabei den Punkt «1» ab.

Dass die R- und S-Vektoren eine Korrelation zur Kreisfläche aufweisen, lässt nebenstehende Abbildung bereits vermuten. So berechnet sich die Kreisfläche des 1. Quadranten mit $r^2 \cdot \frac{\pi}{4}$ was Phasenmässig zum Vektor $S4\angle\frac{\pi}{4}$ passt.

Bild 5: Punkt 1 kann als Sehnenlänge oder als Vektorfläche interpretiert werden.

Beim Flächenvektor $R4\angle 2\pi$ gilt zu beachten, dass bei einer Integration über alle vier Quadranten, die Fläche Null wird. $(\int_0^{2\pi} A \cdot sin(\omega t)dt = 0)$. Für die Berechnung der Gesamtfläche sind daher die Integrationsgrenzen zu beachten.

Alternativ dazu kann in der xy-Eben zu den $nsin$- und $ncos$ Funktionen eine Konstante $\frac{n}{2}$ addiert werden, um die negativen sin- und cos-Anteile zu vermeiden.

Definition für die Zahlen auf der x- und y-Achse

Der Einheitsvektor mit der Einheitslänge $\mathcal{L}_y = 1$ und der Einheitsphase $\mathcal{L}_x = \pi$ wird mit dem Vektor $R1\angle\pi$ beschrieben. Diesem Vektor mit dem Verhältnis $\frac{A}{M} = \frac{1}{1}$ kann damit ein Additionsanteil 1 und ein Phasenanteil 1 zugeschrieben werden. In der R-Darstellung wird der Additionsanteil (cos-Wert) in x- und der Phasenanteil (sin-Wert) in y-Richtung abgebildet. Das heisst dass der Vektor $R1\angle\pi$ einen -x Punkt definieren kann. Damit lässt sich die Fläche $A = r\pi$ eines Quadranten berechnen, sie beträgt 25% der Einheitskreis-Fläche. Normiert man die Gesamtfläche des Einheitskreises auf 1^2, so kann dem Einheitsumfang eine Länge von $U = 2\pi$ = $2\mathcal{L}_x$ zugeschrieben werden.

Wird auf die x-Achse $(y = 0)$ referenziert, kann dem Vektor $R1\angle\pi$ die Länge 2 zugeordnet werden. Wird hingegen auf eine verschobene y-Achse (x= 1) referenziert kann dem Vektor $R1\angle\pi$ nur noch die Länge 1 zugeordnet werden. Der Vektorspitze vom $R1\angle\pi$ kann daher der Punkt -1 zugeschrieben werden.

Die y-Achsen-Referenzierung gilt für den S-Vektor. Für ihn gilt daher die Aussage, dass die Spitze den Phasenwert π beschreibt. Damit lässt sich das Produkt $A \cdot M = 1 \cdot \pi$ und damit die Fläche eines Halbkreises $\frac{r^2\pi}{2}$ herleiten. Diese Fläche ist kohärent zu einem Dreieck mit zwei Katheten der Länge $1\mathcal{L}_y$ und einer Winkelsumme von 180^0. Die Hypotenusenlänge $\sqrt{c}$ kann dem S-Vektor zugeordnet werden und die beiden Katheten lassen sich mit den Vektoren $R\frac{D}{2}\angle\pi + R\frac{D}{2}\angle\pi$ abbilden. Die beiden R-Vektoren beschreiben den 1-Punkt, der S-Vektor den $\sqrt{1}$-Punkt.

Umrechnung von Längen und Phasenverhältnissen zwischen R-Vektoren

Aus Bild 1 geht hervor, dass folgende Transformationen möglich sind:

$$\boxed{R4\angle\frac{\pi}{2} \rightarrow R1\angle 2\pi \rightarrow R3\angle\frac{2\pi}{3}}$$

Ein Sehnenvektor beschreibt indirekt eine Bogenlänge (Phasenwert) und damit immer eine $n^1 - Zahl$. R-Vektoren beschrieben immer eine Fläche (Vektorlänge * Vektorphase) und damit eine n^2-Zahl.

Der Vektor S$1\angle\frac{\pi}{2}$ sowie alle andern S$n\angle\frac{\pi}{2}$ Vektoren sind daher auch keine Sehnenvektoren, weil eine Durchmessersehne die Fläche eines Halbkreises beschreibt. Der Durchmesser ist daher als Summenvektor, bestehend aus zwei R$n\angle\pi$ Vektoren, zu verstehen.
Ein S$n\angle\frac{\pi}{2}$ Vektor muss daher auf einer Nulllinie liegen, damit der Realteil wegfällt, diese Nulllinie ist in der R-Darstellung die $S_{Ref} - Achse$ (Bild 2).

Aus Bild 2 ist zudem ersichtlich, dass eine Sehnenlänge S< $2r = D$ sein muss, weil mit der Sehnenlänge keine Flächenzahl (n^2 Zahl) abbilden kann. Der Durchmesser ist aber eine n^2 Zahl. Der Punkt auf der -x-Achse sowie alle Punkte im 3. und 4. Quadranten können daher nur mit einer gefalteten Sehne oder mit einer Sehne mit negativem Phasenwinkel abgebildet werden. Zudem gilt: $\alpha_S = \frac{\alpha_R}{2}$

Für das Erkennen von bestimmten Zahleneigenschaften können verschiedene Zahlen-Darstellungsarten verwendet werden. Welche von diesen Darstellungsarten zu bevorzugen sind, richtet sich nach der Fragestellung.

Nachfolgend werden drei Darstellungsarten vorgestellt, welche in diesem Skript zur Anwendung kommen.

Verwendete Darstellungsvarianten

- R-Darstellung, Radiusvektor-Darstellung.
- S-Darstellung, Sehnenvektor-Darstellung.
- Z-Darstellung (3D-Darstellung), Vektor zeigt auf eine Manteloberfläche eines Zylinders. Dieser Zylinder ist eine Dose mit abschraubbarem Deckel. Dabei können Zahlen sowohl auf dem Mantel des Zylinderunterteils wie auch auf dem Mantel des Zylinderoberteils (Zylinderdeckels) dargestellt werden.
  Diese Dose wird als Eulerrolle bezeichnet und ist zur Patentierung eingereicht worden. Die Besonderheit der Eulerrolle besteht darin, dass viele Erkenntnisse der Grundlagenmathematik relativ leicht verständlich dargestellt werden.
  Zudem sind auch Aussagen zur höheren Mathematik und zur Zahlentheorie möglich.

2 Die Eulerrolle, ein Modell zur 3D-Darstellung von Zahlen

Jeder Zahl n^1 kann eine Quadratzahl n^2 sowie eine kubische Zahl n^3 zugeordnet werden. Die $n^1 - Zahlen\ und\ die\ n^2 -, wie\ auch\ die\ n^3 - Zahlen$ die gleiche Mächtigkeit aus.

Auf einer Kreisfläche, mit einem Gültigkeitsbereich $r^2\pi = n^2\pi$ lässt sich eine n^3-Zahl nicht mehr abbilden (ausserhalb des Gültigkeitsbereichs der Rn-Darstellung).

Grundsätzlich lässt sich der Gültigkeitsbereich einer xy-Ebene erweitern, indem zur xy-Ebene um eine weitere Dimension xyz zugeführt wird.

Die Erweiterung mit einer dritten Dimension hat aber den Nachteil, dass sämtliche mathematischen Funktionen komplexer werden und zudem bei 3D-Abbildungen die Winkel- und Längentreue nicht mehr gewährleistet ist.

Beispiel: Sie laufen auf der 3D-Erdoberfläche zuerst eine gewisse Strecke nach Osten, drehen dann um 90^0 nach links und laufen wieder eine Strecke x bis sie dann nochmals um 90^0 nach links drehen. Nachdem sie nochmals die Strecke x abgelaufen sind, kommen sie ohne zusätzliche Drehung wieder an den Anfangspunkt zurück.

Frage: Ist das ohne eine vierte 90^0-Drehung möglich und wenn ja, wie viele Ausgangspunkte auf der Erde gibt es, wo dies möglich wäre?

Antwort: Ja, es ist möglich und es gibt unendlich viele Punkt auf der Erde, die als Ausgangslage in Frage kommen.

Das Beispiel zeigt, dass durch Längenverzerrungen auf der gekrümmten Erdoberfläche Phasendrehungen kompensiert werden können.

Für eine 3D-Erweiterung würde sich als einfachster Körper ein Würfel anbieten. Da jedoch eine Kreisumfanglänge mindestens annäherungsweise abgebildet werden muss, eignet sich ein Zylinder mit einer kreisförmigen Grundfläche und einer Höhe z besser. (S-Vektoren)

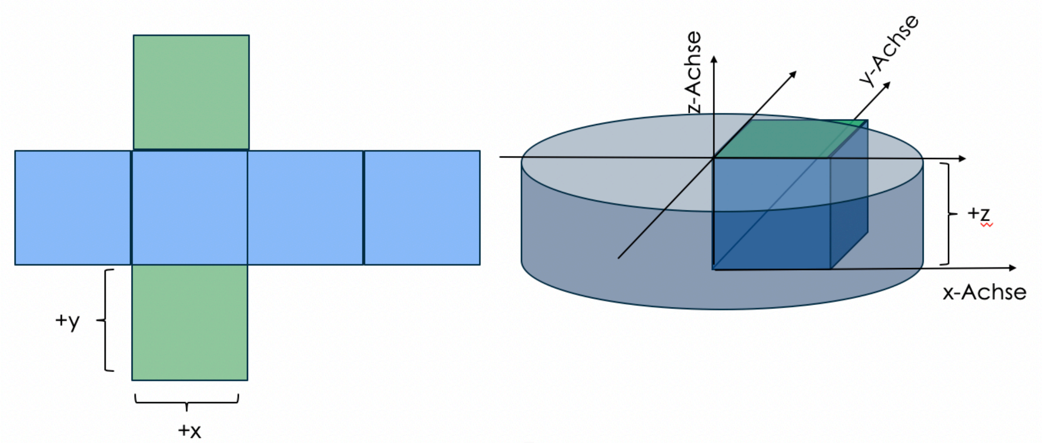


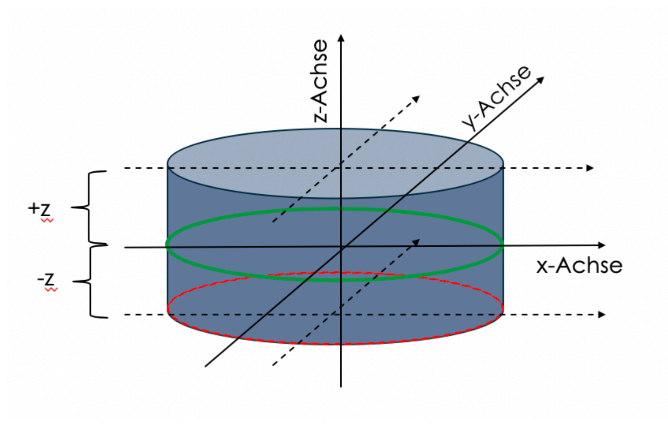
Bild 6: Jeder Länge kann eine Fläche und ein 3D-Körper zugeordnet werden.

2.1 Die Z-Darstellung

Nebst der R- und S-Darstellung wird zusätzlich eine Z-Darstellung mit einem erweiterten Gültigkeitsbereich eingeführt, damit auch eine n^3- Zahl dargestellt werden kann. Die Z-Darstellung ist eine Abbildung von Zahlen und Vektoren auf einer Manteloberfläche. Idee: Die Dritte Dimension kann dabei in eine 2D-Darstellung überführt werden, indem die gekrümmte 3D-Fläche auch als 2D-Abwicklung mit entsprechender Längenkorrektur dargestellt werden kann.

Damit eine bijektive Abbildung zwischen R-, S- und Z-Darstellung möglich ist, darf die Zylinderhöhe (z-Komponente) in der Z-Darstellung nicht null sein, weil mit $z = 0\ auch\ jedes\ Produkt\ xyz = 0$ ist. ($xyz = Länge\ \cdot Breite\ \cdot Höhe$).

Um auf einer 2D-Fläche eine 3D-Zahl abbilden zu können, muss die Mantelfläche geteilt werden, damit ein unterer Teil der Mantelfläche als xy-Fläche und ein oberer Teil als zx-Fläche abgebildet werden kann. Die Mittellinie, welche den Übergang von der xy- zur zx-Fläche bildet, kann als Nulllinie definiert werden. Auf dieser Nulllinie lässt sich der Zylinderumfang (n^1- Zahl) ablesen.



Die Z-Darstellung ist eine 3D-Darstellung mit den Koordinaten x, y und z.

Eine Zahl n^1 kann dabei als Quadratseite oder als Seitenlänge eines Dreiecks interpretiert werden. Diese Längen müssen auf einer Nulllinie liegen.

Jeder R- oder S-Vektor besitzt einen

Phasen- und Additionsanteil und kann als Teilfläche der Mantelfläche interpretiert werden.

Bild 7: Zylinder mit x, y und z-Koordinate

Da in y- und z-Richtung die Einheitslänge $1\mathcal{L}_y$ und in der x-Richtung die Einheitslänge $1\mathcal{L}_x$ nicht unterschritten werden darf, bildet in der Z-Darstellung der Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die kleinste Zahl, welche abgebildet werden kann.

Dieser Punkt ist in der Z-Darstellung (Abb. 8) als Punkt 2j gekennzeichnet und kann im gleichen Bild mit dem Vektor Rj2 beschrieben werden.

In der R-Darstellung wird der Phasenwert eines Vektors immer mit $\angle k\pi$ angegeben.
In der Z-Darstellung wird zwischen A- und M- Teil klar unterschieden, das heisst in y-Richtung wird ein Amplitudenwert (A) und in x-Richtung ein Phasenwert $\angle n\pi$ angegeben. Ein R- oder S-Vektor kann in die Z-Darstellung abgebildet werden. Ein in die Z-Darstellung transformierter Vektor wird mit dem Phasenwinkel-Symbol φ gekennzeichnet. Für die Transformation gilt folgende Regel: $\varphi = n\pi$

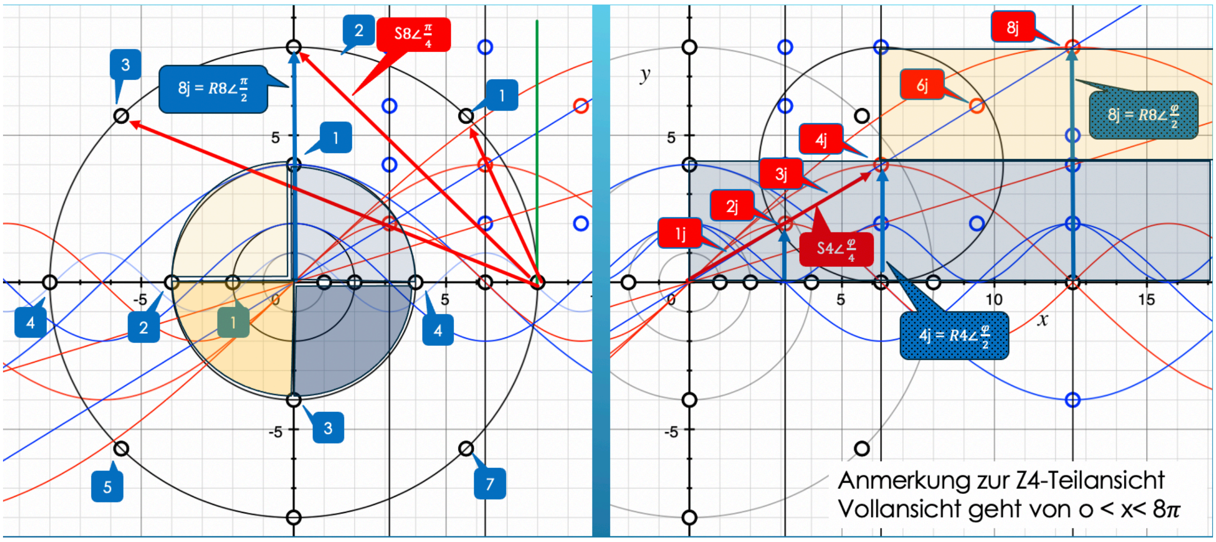


Bild 8: R-Darstellung (links) und Z-Darstellung (rechts) im direkten Vergleich.

Damit eine zweidimensionale R-Darstellung auf eine Mantelfläche eines dreidimensionalen Zylinders (Z-Darstellung) transformiert werden kann, muss die obere und untere Zylinderhälfte auf eine Art verknüpft werden, dass jede Längenänderung zwingend auch eine Flächen- und Volumenänderung verursacht. Das heisst, eine Addition in y Richtung muss eine Verlängerung in x- sowie in z-Richtung verursachen. Diese Anforderung kann mit einer verschraubbaren Dose erfüllt werden. Dabei bildet der Zylinderdeckel eine zx-Fläche und der Zylinderunterteil eine yx-Fläche, welche mit einer Schraubenlinie (mit geeigneter Steigung) verbunden ist. Die Höhenveränderung setzt eine Drehbewegung und damit auch eine Drehzeit voraus. Auf dem Zylinderunterteil können auf der Mantelfläche die Raumdimensionen x und y abgebildet werden. Auf der Manteloberfläche des Zylinderoberteils (Zylinderdeckel) kann die Raumdimension z und die eine Dimension Zeit abgebildet werden. Durch die Verknüpfung (Schraubenlinie) der beiden Teile verursacht jede Deckel-Drehbewegung (Multiplikation) eine Veränderung der Zylinderhöhe. Die Abbildung eines R4-Vektors erfordert eine minimale Zylindererhöhung (Dosenunterteil) von h=z=4. Dabei besitzt der Dosendeckel die gleiche Höhe wie der Zylinderunterteil. Bei geschlossenem Deckel ist die Gesamthöhe des Zylinders ($h_{tot} = h_y + h_z = 4 + 0 = 4$). Wird der Deckel abgeschraubt, steigt die Gesamthöhe des Zylinders auf $4\mathcal{L}_y$ $4\mathcal{L}_z$ (Höhe des Zylinderunterteils + Deckelhöhe) an. Die Schraubenlinie wird so gewählt, dass mit einer Drehung um 90° der Deckel vollständig abgeschraubt werden kann.

2.2 Die Eulerrolle

Die Eulerrolle kann als Trägermodell für die Z-Darstellung verstanden werden.

Ziel und Zweck von einem Modell ist ein einfacherer Zugang zum Verständnis. Modelle können damit auch Hilfsmittel sein, welche zum Erklären von komplexen Zusammenhängen zur Anwendung kommen. Die Eulerrolle ist ein solches Hilfsmittel. Der Name Eulerrolle wurde von Prof. J. Pachl vorgeschlagen, weil mit diesem Hilfsmittel u.a. die Eulerrelation $e^{j\pi} - 1 = 0$ realtiv einfach erklärt werden kann.

Dimensionierung der Eulerrolle

Zylinderradius $\quad r = n\mathcal{L}_y$

Höhe Zylinderunterteil (Dosenhöhe) $\quad h_y = y = n\mathcal{L}_y$

Höhe Zylinderoberteil (Deckelhöhe) $h_z = Z = n\mathcal{L}_z \qquad (\mathcal{L}_y = \mathcal{L}_{z})$

Anmerkung für den Zylinderumfang: Das Produkt $2\mathcal{L}_y \cdot 1\mathcal{L}_x$wird in Länge $2\mathcal{L}_x$ umgeformt

Zylinderumfang $\quad x = Dn = 2r\pi = 2\mathcal{L}_x$

Steigung der Schraubenlinie: $\quad m = \frac{h_y+h_z}{\frac{U}{2}} = \frac{2n}{n\pi} = \frac{2\mathcal{L}_y}{\mathcal{L}_x} = \frac{2}{\pi}$

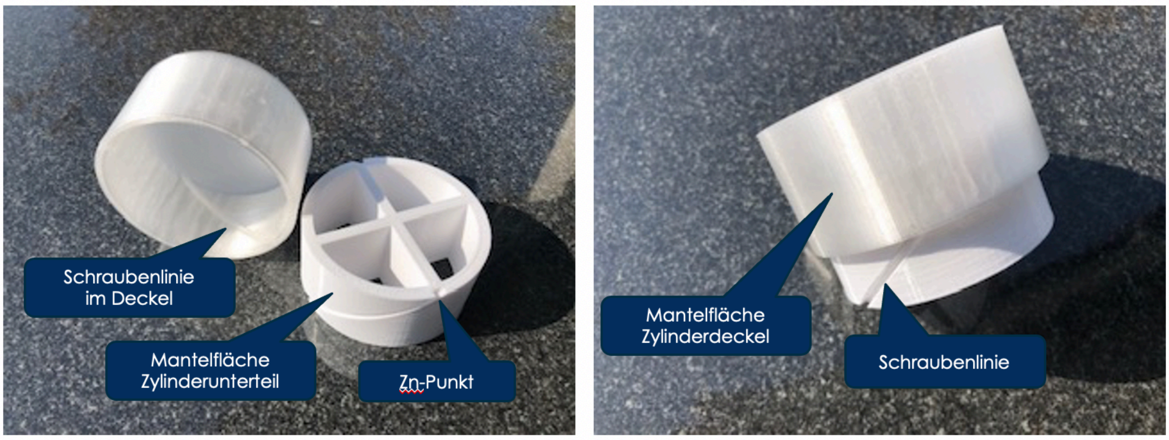


Bild 9: Z4-Zylinder mit Ober- und Unterteil, Schraubenlinie: m=2h/r

Mit dieser Zylinderdose lassen sich Längen und Flächen aus dem imaginären Zahlenraum auf eine Zylindermantelfläche transformieren. Der wesentliche Unterschied zwischen der R- und Z-Darstellung besteht darin, dass in der R-Darstellung (imaginärer Zahlenraum) die Additionsanteile und Phasenanteile eines Vektors durch sin- und cos- Funktionen differenziert werden.

Im Gegensatz dazu wird in der Z-Darstellung (Abbildung von Vektoren auf einer Manteloberfläche) der Additionsanteil in y-Richtung und der Multiplikationsanteil in x-

Richtung abgebildet. Dabei werden für die x- und y-Richtung unterschiedliche Einheiten verwendet.

Nebst Vektoren können auch Längen und Flächen von der R- oder S-Darstellung in die Z-Darstellung transformiert werden. Besonders bei 3D-Volumenzahlen ist darauf zu achten, dass der Gültigkeitsbereich nicht überschritten wird. Dabei ist vor allem die Zylinderhöhe zu beachten, welche nur bis zu einer Höhe von 2n ausgedreht werden kann.

In der nachfolgenden Z-Darstellung repräsentiert die blaue Rechteckfläche jeweils die Mantelfläche des Zylinderunterteils (Zylinderboden) und die orange Fläche die Mantelfläche des abschraubbaren Zylinderdeckels. Die Schraubenlinie ist mit der blauen Geraden $y = \frac{2r}{\pi}$ definiert. Speziell zu beachten ist die x-Verschiebung des Zylinderdeckels.

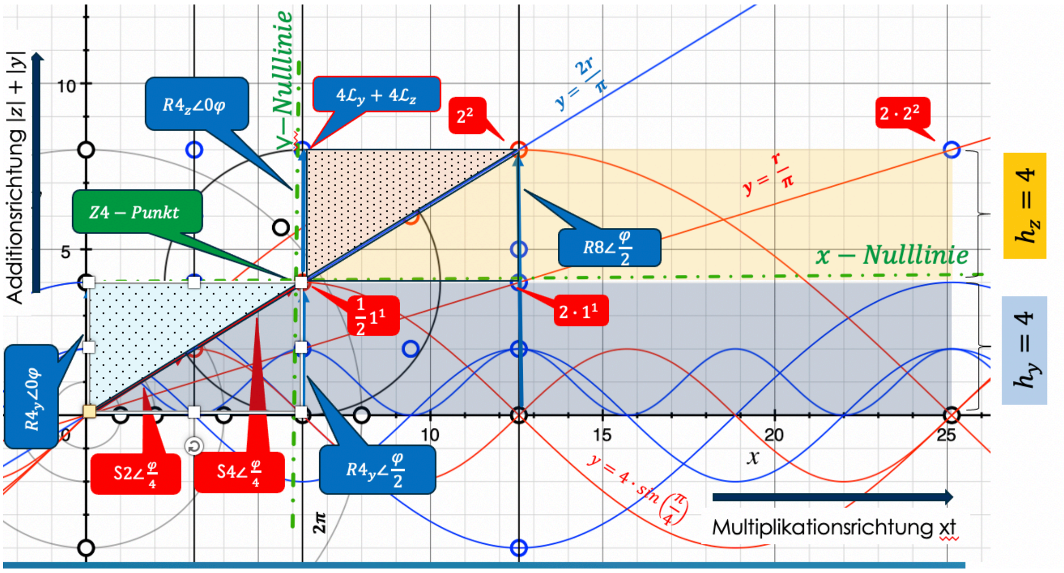


Bild 10: Z4-Darstellung mit Zylinderboden (blau) und Zylinderdeckel (orange).

Anmerkung: So wie auf dem Einheitskreis ein Punkt auf der -x-Achse unterschiedlich interpretiert werden kann $-1, \sqrt{1}\ oder\ \frac{u}{2}$) kann auch in der Z-Darstellung ein Punkt unterschiedlich interpretiert werden und erfordert daher zusätzliche Erklärungen.

Allgemeine Erklärungen zu Bezeichnungen auf der Manteloberfläche.

- Das Abschrauben des Zylinderdeckels bewirkt, dass sich der Zylinderdeckel entlang der Schraubenlinie nach oben und nach rechts verschiebt.
- Bei der $R \to Z$ Transformation wird die R-Kreismitte $(x, y) = (0,0)$ um den Wert $n\mathcal{L}_y\ in\ y$-Richtung und $n\mathcal{L}_x\ in\ x$-Richtung verschoben. Der Z4-Punkt ist somit der transformierte Mittelpunkt der R-Darstellung. Die $x - Nullinine$ in der Z-Darstellung ist die transformierte x-Achse der R-Darstellung. Analog gilt dies auch für die $x -$ $Nullinine$ und y-Achse.

- Da die Phaseneinheit ($\mathcal{L}_x = \pi$) grösser als die Amplitudeneinheit ($\mathcal{L}_y = 1$) ist, werden bei der $S \rightarrow Z$ Transformation sämtliche Linien und Flächen in x-Richtung gedreht. So wird ein Sehnen- oder ein Radius -Quadrat in der Z-Darstellung nicht als Quadrat, sondern als Rechteck abgebildet.
- Ein Vektor entlang einer Nulllinie ist immer ein Längenmass(n^1-Zahl). Alle Vektoren, welche nicht auf einer Nulllinie liegen, bilden eine Flächenzahl ab (n^2-Zahl).
- Generell gilt für die Z-Darstellung:

  S-Vektoren bilden immer eine Länge ab (Näherungswert für das Bogenmass)

  R-Vektoren bilden immer eine Fläche $n \cdot \varphi$ $(Vektorlänge \ \cdot Vektorphase)$ ab.
- In der Z-Darstellung ist der Rn_Z-Vektor gegenüber dem Rn_y-Vektor um 90^0 verschoben. Transformiert man diese Vektoren zurück in die R-Darstellung, handelt es sich beim Rn_y-Vektor um einen j-Vektor und beim Rn_z-Vektor um einen -x Vektor. Mit dem Produkt der beiden Vektoren kann somit die Fläche n^2 berechnet werden. Die Phasenwerte werden für diese Berechnung nicht mit einbezogen.

  In der Z-Darstellung kann mit der Summe der beiden Vektoren (Rn_y + Rn_z).das Quadrat berechnet werden

Gleichzeitige Drehung des Zylinderoberteils und -unterteils.

Grundsätzlich können beide Zylinderteile gleichzeitig in Gegenrichtung gedreht werden.

In diesem Fall kann die x-Richtung generell als Zeitkoordinate definiert werden. Zudem muss nicht mehr zwischen y und z-Richtung unterschieden werden.

(Substitution von $\mathcal{L}_y + \mathcal{L}_z$ durch $2\mathcal{L}_y$).

Diese Anwendung ist in der Elektrotechnik verbreitet. Bei dieser Betrachtung können reelle Zahlen als cos-Vektoren interpretiert werden, welche in entgegengesetzter Richtung rotieren. Es ist daher zu erwarten, dass die Vektoren, wie in der Wechselstromlehre, auch in folgender Form beschreibbar sind:

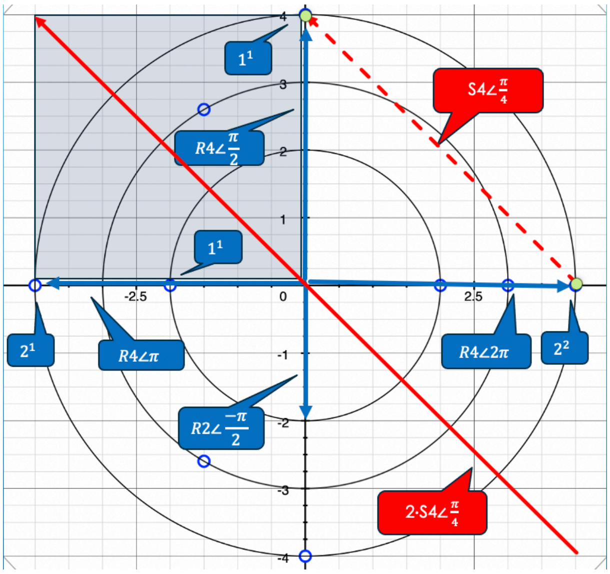
$y = A \cdot \sin(\omega t) \quad bzw. A. \cos{(\omega t)}$.

! Eine 90^0 Drehung des Deckels kann als Koordinatendrehung interpretiert werden.

Im Gegensatz dazu ist eine Vektordrehung eine Multiplikation bzw. eine Division. Wie noch gezeigt wird, ist eine Vektordrehung eingeschränkt.

R- und S-Vektoren im imaginären Zahlenraum

R→ Z Transformationen werden durch einen direkten Vergleich der verschiedenen Darstellungsarten verständlicher.



Grundsätzlich besitzt jede R- und S-Darstellung eine Auflösungsgrenze. So kann ein R4-System genau 4 Punkte und ein Rn-System genau n Punkte auf seinem Umkreis abbilden.

Diese Punkte können Zahlen zugeordnet werden, welche zur Umfanglänge korrelieren. Zahlen auf einem Kreisumfang können jedoch eine Bogenlänge (n^1) und/ oder eine Teilfläche eines Kreises (n^2) abbilden. Eine Länge und eine Fläche sind offensichtlich nicht oder nur bedingt vergleichbar.

Bild 11: Vektoren im imaginären Zahlenraum

Auf dem Einheitskreis ist die Einheitslänge 1^1 als Radiuslänge definiert. Infolgedessen könnte man die Kreisfläche $1^2\pi$ als Einheitsfläche definieren. Diese Fläche wird mit dem Vektor R1$\angle 2\pi$ beschrieben, wobei r^2 mit den beiden Vektoren R1$\angle\frac{\pi}{2}$ und R1$\angle\pi$ als Seitenlänge a und b einer Quadratfläche interpretiert werden können. Die Diagonale von diesem Quadrat kann als Sehnenlänge interpretiert werden, welcher eine Steigung $m = \frac{y}{x}$ zugeordnet werden kann. Zudem gilt: Wird einem Rn$\angle 2\pi$ Vektor die Zahl n^2 zugeordnet, kann die Zahl $\frac{n^2}{2}$ dem Vektor Rn$\angle\pi$ und die Zahl $\frac{n^2}{n}$ = n dem Vektor Rn$\angle\frac{2\pi}{n}$ zugeordnet werden.

Diese Kreissektor-Flächen können von der R-Darstellung in die Z-Darstellung transformiert werden, und werden nach der Transformation als Rechteckfläche abgebildet. Der Vorteil dieser Transformation liegt darin, dass die abgebildeten Flächen und Vektoren leichter analysiert werden können.

R- und S-Vektoren in der Z-Darstellung

Transformiert man die Flächen und Vektoren aus Bild 11 in die Z-Darstellung, zeigen sich interessante Zusammenhänge, welche in Bild 12 dargestellt werden. Auf die Beschriftung der abgebildeten sin- und cos-Funktionen wird verzichtet.

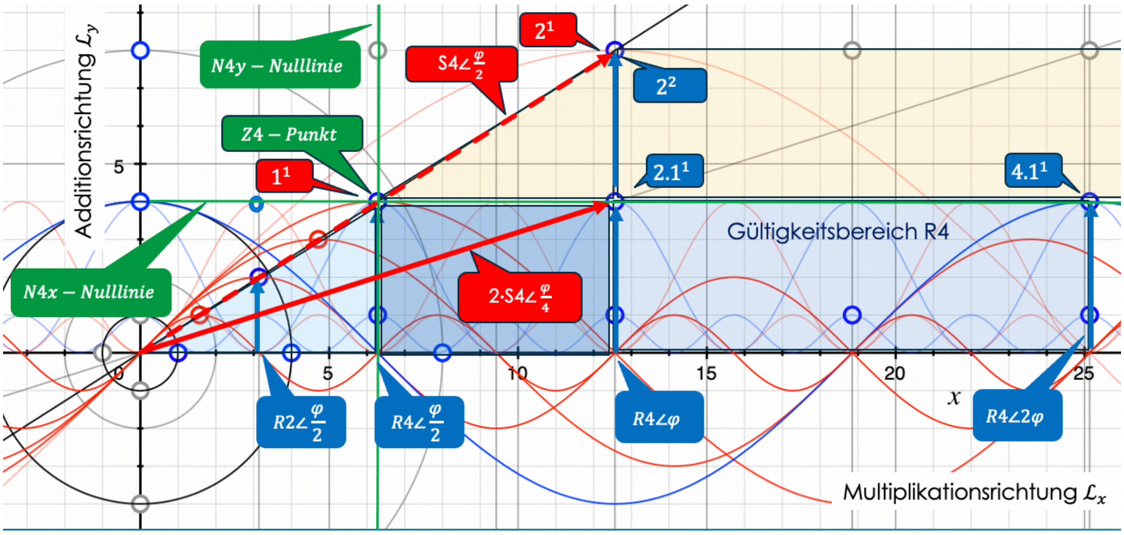


Bild 12: Vektoren in der Z-Darstellung (Manteloberfläche der Eulerrolle)

Resultate der R→Z Transformation

Kreismittelpunkt $(x, y) = (0{,}0)$ der R4-Darstellung wird in **Z4-Punkt** $(x, y) = \left(4\frac{\pi}{2}, 4\right)$ transformiert.
Die R→Z Transformation ist als Addition mit anschliessender 90^0-Koordinatendrehung zu verstehen. Entsprechend verschieben sich durch die Transformation auch die Nulllinien.

Die Rx-Achse wird zur N4x-Nulllinie in der Z-Darstellung (und die Ry-Achse zur N4y-Nullinine).

Ein Rjn-Vektor auf der y-Achse wird in der Z-Darstellung zu einem Rn$\angle\frac{\varphi}{2}$ Vektor.

Den Vektoren gemeinsam ist, dass beide Vektoren auf einer Nulllinie liegen und damit nur eine $n^1 - Zahl$ abbilden können. Vektoren auf der y-Nulllinie haben nur einen Additionsanteil, ihr Phasenanteil ist Null. Trotzdem enthalten die entsprechenden Vektorbezeichnungen einen Phasenwert $\pi\ bzw.\varphi\ \neq 0$ Dies mag irritierend erscheinen, kommt aber daher, dass eine Zahl n^1eine natürliche Zahl abbildet deren Länge immer durch n teilbar ist ($\frac{n^1}{n^1} = 1^1$).

Beispiel:

Eine Länge $4\mathcal{L}_y$ ist durch 2 und durch 4 teilbar und kann mit dem Vektor R4$\angle\frac{\varphi}{2}$ abgebildet werden. Eine Teilung ist als Vektordrehung zu verstehen, das heisst, der Phasenwert $\frac{\varphi}{2}$ muss durch 4 teilbar sein ($\frac{\varphi}{4}\ und\ \frac{\varphi}{8}$)

Der Vektor R4$\angle\frac{\varphi}{8}$ kann in einen Vektor R1$\angle\frac{\varphi}{2}$ → R1$\angle\frac{\pi}{2}$ und der Vektor R4$\angle\frac{\varphi}{4}$ kann in einen Vektor R1$\angle\pi$ → R1$\angle\pi$ transformiert werden. Der Vektor R1$\angle\pi$ entspricht der Zahl 1^0. Diese Zahl kann mit einem Vektor abgebildet werden, welcher auf der x-Achse und damit auf einer Nnx-Nulllinie liegt.

In der R-Darstellung kann dieser Vektor, bestehend aus einem $cos\pi$-Anteil verstanden werden, dem ein Realteil $x = n$ zugeordnet werden kann. Dieser Vektor alleine macht aber noch keine n^1- Zahl aus, ihr fehlt ein Phasenanteil $y = \varphi$. Daher ist der Vektor R1$\angle\pi$ mit einem zusätzlichen und gleichwertigen j-Vektor R1$\angle\frac{\pi}{2}$

verknüpft. Die Zahl 1^0 und damit auch jeder R-Vektor auf der -x-Achse ist daher immer als Vektorpaar, bestehend aus einem j-Vektor (Imaginärteil) und einem -x Vektor (Realanteil) zu verstehen. Zusammen bilden diese beiden Vektoren eine Zahl n^1und damit eine Länge ab.

Diese Vektorkopplung lässt sich in der Z-Darstellung als Dreieckfläche mit einem n^1-Phasenanteil (Kathete a) und einem n^1-Amplitudenanteil (Kathete b) darstellen. Mit diesen beiden Längen lässt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Hypotenuse c und einer Fläche $\frac{1}{2}a \cdot b$ konstruieren. Dieser Dreieckfläche muss eine Länge zugeordnet werden können, welche Kohärenzbedingungen erfüllt. Die doppelte Länge der Hypotenuse erfüllt diese Bedingungen.

In der R-Darstellung entspricht diese Länge dem halben Umfang und die Fläche der halben Kreisfläche.

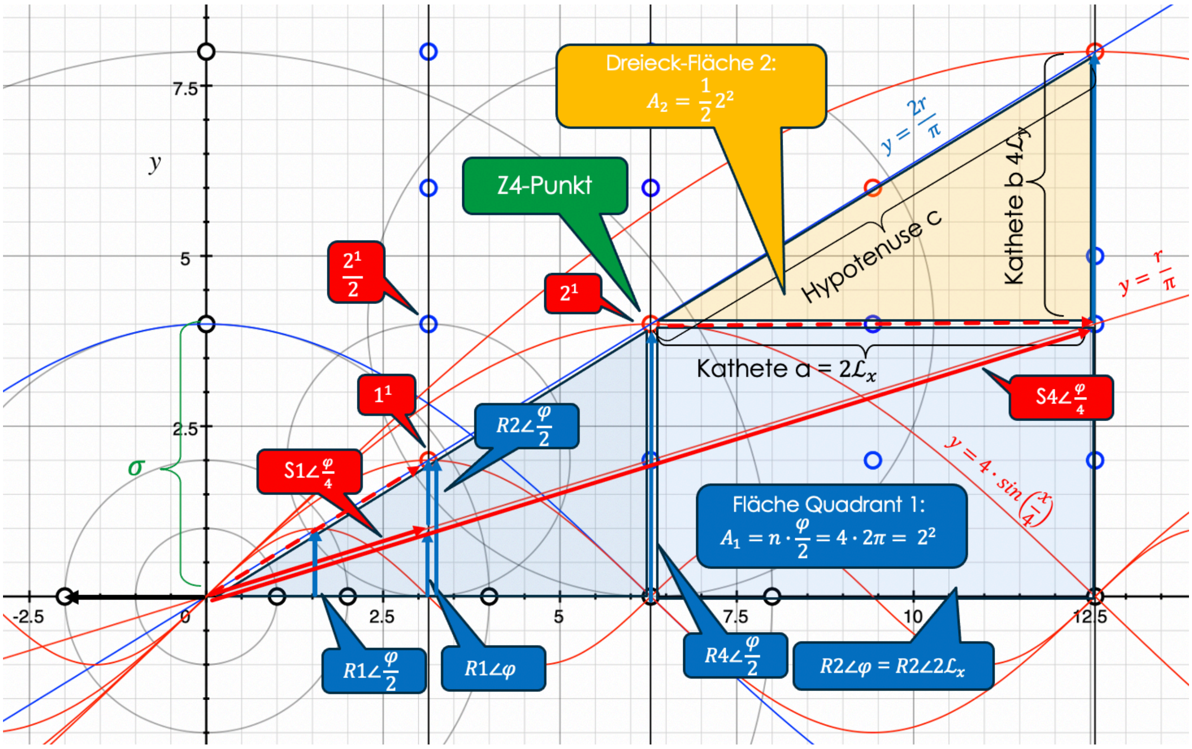


Bild 13: Flächenvektoren (R-vektoren) und Längenvektoren (S-Vektoren).

!	Einem Vektor Rn$\angle 2\varphi$ kann in der Z-Darstellung immer eine teilbare Fläche $n.2\varphi$ zugewiesen werden. Dieser Fläche kann eine kohärente Umfanglänge zugewiesen werden. Somit ist beim Vektor Rn$\angle 2\varphi$ seine zugewiesene n^2-Zahl wie auch n^1-Zahl teilbar. Das heisst: Katheten a und b wie auch Hypotenuse c sind teilbar. Die Hypotenusen-Teilung kann als $\sqrt{n} - Funktion$ interpretiert werden. Somit gilt: Rn$\angle 2\pi \div 2 = \mathrm{Rn}\angle\pi = \sqrt{\mathrm{Rn}\angle 2\pi}$.

! In der Z-Darstellung wird ein R-Vektor $\mathrm{Rn}\angle\pi$ als $\mathrm{Rn}\angle\varphi$ = $\mathrm{Rn}\angle n\pi$ abgebildet. Der Additionsteil A des Vektors $\mathrm{Rn}\angle\pi$ ist durch n teilbar. Als Resultat aus der Amplitudenteilung entsteht ein Vektor $\mathrm{R1}\angle n\pi = \mathrm{R1n}\angle\pi$, welcher aus einem Phasenteil ($\sin\frac{\pi}{2}$) und einem Additionsanteil ($\cos\pi$) besteht und somit ein Vektorpaar R1 ($\sin\frac{\pi}{2}$) + R1($\cos\pi$) bildet.

Dieses Vektorpaar kann als Summenvektor Kathete a + Kathete b, bzw. Sehnenvektor $\sqrt{c} = \sqrt{a^2 + b^2}$ geschrieben werden.

Für b + a gilt: R1 ($\sin\frac{\pi}{2}$) + R1($\cos\ \pi$) $=\ 1^1(A - Anteil) +\ 1^1(M - Anteil)$
Für Sehnenvektor $\sqrt{c}$ gilt: $\sqrt{1^2 + 1^2} =\ \sqrt{2}$

Diese Länge wird mit dem Vektor $S2\angle\frac{\varphi}{4}$ abgebildet.

In der Z-Darstellung ist das die Rechteckdiagonale des Rechtecks 2.φ welches der Vektor $\mathrm{R2}\angle\varphi$ beschreibt.

In der R-Darstellung ist es die 45^0-Sehne mit der Länge r$\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Der Vektor $\mathrm{R2}\angle\varphi$ wird in der R-Darstellung als $\mathrm{R2}\angle\pi$ abgebildet und kann die Zahl -1 auf der x-Achse abbilden. Diese Zahl kann als Durchmesserlänge 2 des Einheitsvektors interpretiert werden und besitzt die Amplitudendimension $\mathcal{L}_y$. Der Radiusvektor hat somit die Länge $1\mathcal{L}_y$. In der Z-Darstellung wird dies Länge als 1·sin($\frac{\pi}{2}$)-Anteil entlang der N2y-Achse abgebildet (Bild 13) und kann als Zahl $1\mathcal{L}_y{}^{0\mathcal{L}_x+0\mathcal{L}_z}$ = 1^0 interpretiert werden.

1^0 ist aber gar keine vollständige Zahl, weil ihr Phasenwert, welcher zwingend Teil einer Zahl ist, mit $1^0 =\ 1^{0\mathcal{L}_x}$ ignoriert wird. Damit wird die Kohärenzbedingung verletzt, weil jeder Zahl sowohl ein Real- wie auch ein Imaginär-Anteil zugeordnet werden kann. Diese beiden Teile sind bei jeder natürlichen Zahl gleichwertig, das heisst, der Quotient $\frac{A}{M}$ muss bei jeder natürlichen Zahl $n^1 =\ \frac{1}{1} = \frac{Aplitudenwert}{Phasenwert}$ = 1 sein.

! In der R-Darstellung zeichnet sich jede Sehne $Sn\angle\frac{\pi}{4}$ dadurch aus, dass Ihr Quotient und damit die Steigung $m = \frac{y}{x} = 1$ ist.

Transformiert man diese Sehne in die Z-Darstellung, wird der Multiplikationsanteil in x- Richtung um den Faktor π gedehnt. Das hat zur Folge, dass die transformierte Sehne $Sn\angle\frac{\varphi}{4}$ eine Steigung $m = \frac{A}{M} = \frac{1\mathcal{L}_y}{1\mathcal{L}_x} = \frac{1}{\pi}$ aufweist.

Die Sehne $Sn\angle\frac{\varphi}{4}$ liegt damit auf einer Linie mit einer Steigung $m\frac{1\mathcal{L}_y}{1\mathcal{L}_x}$

In der Z-Darstellung wird diese Linie P-Linie oder $\sqrt{2}$-Linie genannt. Besonderheit dieser Linie: Auf ihr liegen alle Primzahlen, weil jede Nichtprim einen höheren M-Anteil hat und damit auf einer flacheren Linie liegen müsste.

2.3 Die Eulerrolle – ein 3D-Körper mit 4 Dimensionen

Jedem Punkt auf der Eulerrolle können die Dimensionen (x, y und z) zugeordnet werden. Damit ist auch gewährleistet, dass es zu jeder Zahl n^1auch eine Zahl n^2 und n^3 gibt, welche auf einer Eulerrolle in Beziehung steht.

Wie für den 2D-Raum aufgezeigt, kann jeder Flächenzahl auch einen Längenzahl (Bogenlänge bzw. Sehnenlänge) zugeordnet werden. Das ist Voraussetzung für die Kohärenzbedingung zwischen Phasen- und Amplitudenwert einer Zahl n^2

Die Exponenten-Schreibweise von natürlichen Zahlen

Jede natürliche Zahl kann in der Form $1\mathcal{L}_y{}^{0\mathcal{L}_x+0\mathcal{L}_z}$ oder auch $1\mathcal{L}_x{}^{0\mathcal{L}_y+0\mathcal{L}_z}$ geschrieben werden.

Wird als Basis die Einheit $\mathcal{L}_x$ für den Phasenwert benutzt, lässt sich jede natürliche Zahl auch in der Form $1\mathcal{L}_x{}^{2\mathcal{L}_y}$ schreiben, weil die Einheit $\mathcal{L}_z$für die Höhe der Eulerrolle mit der Einheit $\mathcal{L}_y$ substituiert werden kann.

Das ist auch Voraussetzung dafür, dass auch eine 3D-Zahl auf einer 2D-Mantelfläche abgebildet werden kann.

Eine Zahl in der Form $1\mathcal{L}_x{}^{2\mathcal{L}_y}$ kann man sich als Sehnenlänge $k\mathcal{L}_x$ vorstellen, welche die Seitenlänge eines Rechtecks bildet, das in z-Richtung auf der Sehne steht.

Diese Form setzt eine 3D-Zahl voraus, weil bereits die Sehne eine x- und y- Koordinate benötigt, um die Kohärenzbedingungen erfüllen zu können. Kommt eine z-Komponente hinzu, muss eine 3D-Zahl immer in eine Form $1\mathcal{L}_x{}^{1\mathcal{L}_y+\mathcal{L}_z}$ umwandelbar sein.

Mit der oben erwähnten Substitution ist jedoch eine Umwandlung in die Form $1\mathcal{L}_x{}^{1\mathcal{L}_y+\mathcal{L}_y}$ = $1\mathcal{L}_x{}^{2\mathcal{L}_y}\ = n^{2k}$ möglich.

Entsprechend kann auch die Zahl $e^{j\pi}$ als $e^{\frac{1}{4}\pi} =\ e^{k\pi}$ interpretiert werden.

Damit muss auch die Zahl e als Basiszahl auf einem Sehnenvektor aufbauen.

Die Vierte Dimension der Eulerrolle

Die Untere Mantelfläche ist im Wesentlichen als transformierte Kreisfläche (R-Darstellung) zu verstehen und kann als Rechteck mit den Längendimensionen $\mathcal{L}_y$ und $\mathcal{L}_x$ verstanden werden. Ein Kreis lässt sich in der Z-Darstellung nicht oder nur mit gebrochenen Zahlen darstellen. Damit kann in der Z-Darstellung eine Bogenlänge nur annäherungsweise mit einem S-Vektor abgebildet werden. Umso mehr Punkte auf einem Umkreis sind, umso besser ist die Auflösung und umso besser wird die Näherung zu einer Bogenlänge.

Eine gute Annäherung an einen Kreisbogen ist somit nur mit sehr grossen Zahlen möglich. Punktuell gelingt eine perfekte Annäherung bei allen cos- oder sin-Nullstellen und somit auch bei kleinen Zahlen.

Die Mantelfläche des oberen Zylinderteiles ist über eine Schraubenlinie an den unteren Teil gekoppelt. Durch eine Vierteldrehung des oberen Zylinderteils kann das Zylindervolumen um den Faktor 2 vergrössert werden. Dieser Faktor ist damit begründet, dass der Zylinder so gewählt wurde, dass die Zylinderhöhe z gleich gross ist wie der Zylinder-Durchmesser. Damit wird der y- Wert und der z Wert vertauschbar, das heisst, z kann durch y substituiert werden. Die Obere Zylinderfläche kann damit als Rechteck mit den Längendimensionen $\mathcal{L}_z$ und $\mathcal{L}_x$ verstanden werden. Auf der oberen Zylinderhälfte ist die Einheit jedoch nicht als Längeneinheit zu verstehen, sondern als Zeiteinheit. Diese Einheit ist zwingend erforderlich, um den Deckel überhaupt abschrauben zu können. Zwischen der Zeit und dem Phasenwert gibt es jedoch eine zwingende Verknüpfung, analog zur Verknüpfung zwischen Länge und Fläche. Der Deckel muss nämlich solange gedreht werden, bis der Phasenwert und damit die Bogenlänge $\varphi = n\pi$ (Länge der Schraubenlinie) abgedreht ist. Der Zeit t kann somit die gleiche Einheit zugeschrieben werden, wie dem Phasenwert φ . Das heisst, dass auch die Zeiteinheit $\mathcal{L}_t$ durch die Länge $\mathcal{L}_x$ substituiert werden kann.

Ein Vorteil der Eulerrolle liegt darin, dass ein 4-Dimensionaler Raum in zwei 2D- Flächen zerlegt werden kann. Dass vereinfacht natürlich die mathematischen Zusammenhänge und ermöglicht auch dem Nichtmathematiker neue Erkenntnisse zu mathematischen Zusammenhängen zu finden.

Das passende Tool zu finden ist nicht nur in der Mathematik ein relevanter Aspekt, jeder Handwerker wird mir das bestätigen können.

Die Eulerrolle ist zur Patentierung als didaktisches Hilfsmittel eingereicht worden:

Damit werden nicht nur komplexe mathematische Zusammenhänge einfacher verständlich.

Auch in der Mathematik für die Mittelstufe gibt es viel Zusammenhänge, die nicht leicht erklärbar sind. Dazu gehört z. B. das Skalarprodukt von Vektoren oder einfach die Frage: Warum ist $x^0 = 1 \text{ und nicht } 0$?

Diese Frage sollte aber nach dieser Einleitung schon fast klar sein, auch wenn unter Kapitel 5 die Zahl 1 nochmals vertieft behandelt wird.

Die Zahl 1 ist sehr speziell, fast wie die Null, die mit der Unendlichkeit verwechselt werden könnte oder vergleichbar mit der Zahl π, die mit der Zahl e in Zusammenhang gebracht werden kann.

3 Topologie und Zahlen auf der Eulerrolle

Anmerkung: In diesem Kapitel gibt es auch gewisse Wiederholungen zu Kapitel 2. Damit soll bewirkt werden, dass der Leser / die Leserin, die fundamentalen Erkenntnisse dieser Herleitungen auf verschiedene Arten nachvollziehen kann. Die Bedeutung der Aussage in Kapitel 7 rechtfertigt solche Wiederholungen.

Die Eulerrolle ist nicht viel mehr als eine Dose mit verschraubbarem Deckel. Speziell ist jedoch die gewählte Geometrie (Durchmesser, Höhe und Schraubenlinie), weil mit dieser Form gewisse Überlagerungen von n^x-Zahlen nicht möglich sind, was einen leichteren Zugang zu einem allgemeinen Zahlenverständnis ermöglicht. Weiter lässt diese Rolle die Erkenntnis zu, dass ein ganzheitliches Verständnis über alle Zahlen mit relativ wenigen Schlüsselzahlen aufgezeigt werden kann. Dazu gehören vor allem sehr bekannte Zahlen wie 1, e oder π aber auch Zahlen wie $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{5}$.

3.1 Die Konstruktion der Eulerrolle

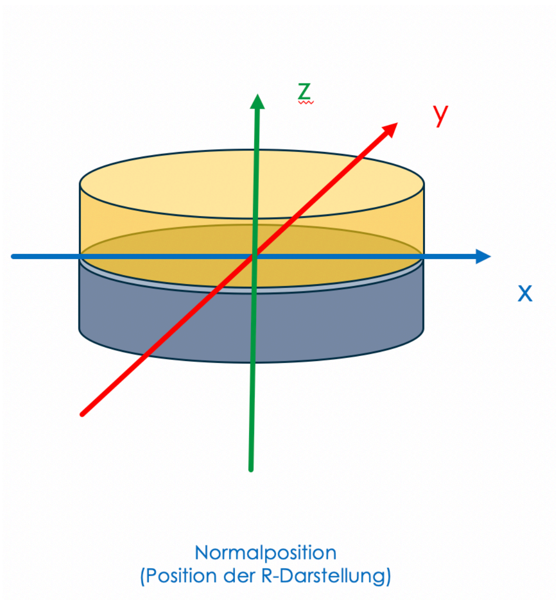


Bild 14: Zylinderdarstellung

Die Eulerrolle besteht aus zwei trennbaren Teilen, einem Dosenunterteil und einem Dosendeckel, wobei die beiden Mantelflächen von Unter- und Oberteil gleich gross sind.

Die Mantelfläche des Zylinderunterteils kann als statische Fläche betrachtet werden. Auf der horizontalen Achse x (Abszissenachse) kann die Raumkoordinate x und der vertikalen Achse (Ordinatenachse) die Raumkoordinate y dargestellt werden.

Weil der Deckel mit einer Drehbewegung abgeschraubt werden kann, wird die Manteloberfläche des Zylinderdeckels als dynamische Fläche betrachtet, dessen Position eine zeitliche Abhängigkeit aufweist.

Punkte, Vektoren und Flächen müssen sich von der R- in die Z-Darstellung transformieren lassen. Ein wesentliches Merkmal der Z-Darstellung ist die differenzierte Darstellung von Additions- und Multiplikations-anteilen auf der Mantelober-fläche. Dabei kann grund-sätzlich zwischen der blauen Mantelfläche des Zylinder-unterteils und der gelben Mantelfläche des Zylinder-deckels unterschieden werden.

Durch das Abschrauben des Zylinderdeckels bewegt sich die Mantelfläche des Deckels in z- und x-Richtung.

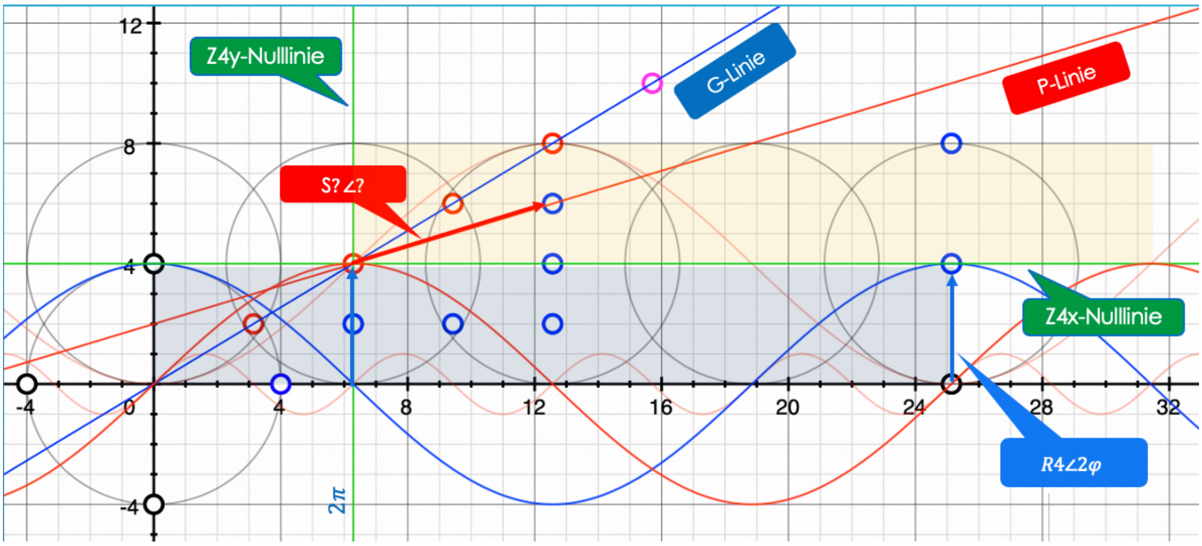


Bild 15: Mantelfläche der Eulerrolle.

Die Bestimmung der Mantelfläche erscheint trivial, jedenfalls lässt sich die Fläche des Unterteils mit $y \cdot x = 4 \cdot 8\pi$ berechnen. Das ist eine Zahl, welche mit dem Vektor $R4\angle 2\varphi$ dargestellt werden kann. Zusammen mit der oberen Mantelfläche müsste somit die gesamte Zylinderoberfläche eine Zahl beschreiben, welche mit dem Vektorpaar $R4\angle 2\varphi + R4\angle 2\varphi$ definiert wird. Vergleicht man das mit der R-Darstellung kann Unsicherheit aufkommen. Entspricht dies der Zahl 4+4 = 8?

Das wäre jedoch eine n^1-Zahl und keine Fläche, was erkennen lässt, dass solche Rückschlüsse mit Vorsicht zu geniessen sind. Spätestens bei der Frage, wo auf der Mantelfläche eine Zahl $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{5}$ abgebildet wird zeigt auf, dass eine genauere Betrachtung angezeigt ist. Dieses Kapitel soll Einsichten zu solchen Fragen geben.

Einschub aus Wikipedia: Kurze Einleitung zum Thema Topologie

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts entstand die Topologie als eigenständige mathematische Disziplin. Sie wird auch als analysys situs (Analyse des Ortes) genannt. Die Topologie kann neben der Algebra als zweiter Pfeiler für eine grosse Anzahl anderer Fachgebiete in der Mathematik verwendet werden. Sie ist besonders wichtig für die Geometrie und die Analysis. Viele mathematische Strukturen lassen sich als Räume auffassen. Topologische Eigenschaften einer Struktur werden solche genannt, die nur von der Struktur des zugrundeliegenden topologischen Raumes abhängen. Dies sind Eigenschaften, die durch 'Verformungen' oder durch Homöomorphismen nicht verändert werden. Dazu gehört, das Dehnen, Stauchen, Verbiegen und Verdrillen einer geometrischen Figur. Aus Sicht der Topologie sind zum Beispiel eine Kugel und ein Würfel nicht zu unterscheiden, sie sind homöomorph. Das gilt auch für ein Donut und eine einhenkelige Tasse. Das heisst, dass ein Donut in eine Tasse mit Henkel transformiert werden kann, die beiden Körper sind bijektiv abbildbar.

3.2 Topologische Zusammenhänge

Eine Zahl n^1 beschreibt eine Linie und ist immer eine eindimensionale Grösse. Eine Linie kann gedehnt oder gestaucht werden und in verschiedenen Längeneinheiten (z. Beispiel $\mathcal{L}_y$ oder $\mathcal{L}_x$) gemessen werden.

Auf einer Linie lässt sich zwar auch ein Mehrfaches einer Zahl $(n + n + n + \cdots)$ abbilden, aber keine Zahl $a \cdot b$, weil jedes Produkt eine Drehung voraussetzt.

Ein Produkt kann immer als 2D-Fläche abgebildet werden und durch Drehung und Dehnung in eine Quadratfläche umgewandelt werden. Die Bezeichnung $n^2 - Zahl$ wird daher in diesem Script nicht nur explizit für Quadratflächen benutzt.

In der Z-Darstellung kann daher eine n^1-Zahl nur mit einem Vektor abgebildet werden, sofern er auf einer Nulllinie liegt. Die vertikale Nny-Nulllinie und die horizontale Nnx-Nulllinie schneiden sich in der Z-Darstellung immer im Zn-Punkt. Transformiert man diese beiden Nulllinien in die R-Darstellung, werden sie als x- und y-Achse abgebildet.

Für eine n^2-Zahl benötigt es eine Zahl ${n_x}^1(Länge)$ und eine Zahl ${n_y}^1(Breite)$ sowie einen Phasenwert damit zwischen den beiden Strecken (Vektoren) ein Winkel $(\varphi \neq 0)$ aufgespannt werden kann. Beim Sonderfall „Quadrat" ist die Länge und Breite gleich gross. In der S-Darstellung sticht das Sehnenquadrat mit der Quadratseite $Sn\angle\frac{\pi}{4}$ (Vektorlänge $r\sqrt{2}$ und Vektorphase 45^0) hervor. Der Umfang des Quadrates ist eine n^1-Zahl und kann als Länge $Sn\angle\frac{\pi}{4} + Sn\angle\frac{\pi}{4} + Sn\angle\frac{\pi}{4} + Sn\angle\frac{\pi}{4}$ abgebildet werden (pro Quadrant wird eine Seitenlänge abgebildet). Ein Quadrat muss nebst der Umfanglänge eine Winkelsumme von 2π aufweisen. Das setzt voraus, dass jede Quadratseite gegenüber einer anliegenden Seite eine Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$ aufweist.

Jedes Quadrat kann in ein flächengleiches Rechteck verwandelt werden. Die Winkelsumme ist von einer solchen Umwandlung nicht tangiert. Für diese Umwandlung genügt es, wenn eine Seitenlänge in x- Richtung auf Kosten einer Seitenlänge in y- Richtung verkürzt oder verlängert wird.

Weiter gilt:

Bei einer R$\rightarrow Z$ Transformation wird das Sehnenquadrat in eine Rechteckfläche transformiert. Dieses Rechteck lässt sich durch seine Diagonale in zwei flächengleiche Dreiecke unterteilen.

Einschränkung: Eine Fläche kann als statisches Element betrachtet werden, was jedoch eine gewisse Vernachlässigung voraussetzt, weil man argumentieren kann, dass eine Drehung eine Funktion $f(t)$ ist. Bei einer statischen Betrachtung wird somit angenommen, dass eine Zahl bzw. ein Vektor als 2D-Element „geboren" wird und damit jeder Vektor, der eine Strecke nur aus einem Additionsanteil und jeder Vektor, der eine Fläche abbildet, aus einem Amplituden- und Phasenanteil besteht.

Mit der gleichen Selbstverständlichkeit wird in der 2D-Darstellung auch davon ausgegangen, dass die dritte Dimension $z = 0$ ist. Die 2D-Darstellung in der R-Darstellung sowie auf dem

Zylinderunterteil der Z-Darstellung ignoriert damit die Existenz des Zylinderdeckels mit den Dimensionen $y\ und\ t$.

In der Konsequenz können daher in der R-Darstellung und auf dem statischen Zylinderunterteil nur $n^1\ n^2\ und\ n^{\frac{1}{2}}$ - Zahlen abgebildet werden.

Dass diese 2D-Annahme unvollständig ist, beweist die Tatsache, dass $n^1\ n^2\ und\ n^3$-Zahlen die gleiche Mächtigkeit haben.

Anmerkung:
In der R-Darstellung können sehr wohl n^3-Zahlen abgebildet werden, sie liegen dann aber nicht mehr im Gültigkeitsbereich der Rn-Darstellung.

---

i

Eine Zahl n^3 ermöglicht eine Volumen-Beschreibung. Auch dieses 3D-Element kann als statisches Element betrachtet werden, vernachlässigt jedoch auch, dass jede Drehung auch eine Zeitkomponente voraussetzt.

Zusätzliche Anmerkung für eine 3D-Zahl:

Eine Volumenzahl ist Voraussetzung für die Existenz der Masse ($x \cdot y \cdot z\ \neq 0$). Damit ist nebst Länge und Breite auch die Existenz eine Höhe $z\ \neq 0$ zwingend.

Jeder Volumenzahl kann ein Zylinder-Teilvolumen zugeordnet werden. Aufgrund der verschiedenen Einheiten lassen sich diese Teilvolumen als Quader abbilden. Auffälligkeit:

Jedem Quader kann eine Raumdiagonale zugeordnet werden.

Einem Würfel kann die Würfeldiagonale mit der Länge $l = s\sqrt{3}$ zugeordnet werden.

Exponentenschreibweise

Eine Raumbeschreibung setzt zwingend eine Zahl mit drei Raumkoordinaten voraus.

Eine 3D-Zahl kann jedoch unter bestimmten Bedingungen in eine 2D-Zahl umgewandelt werden ($Beispiel: xyz =\ 3^3 = xy = 3 \cdot 9$).

Das gewählte Beispiel mag unscheinbar erscheinen, hat aber physikalisch eine Bedeutung. So kann zB. einem Körper, eine Masse zugeordnet werden, was bei einer Fläche nicht der Fall ist. Mathematisch heisst das, dass bei einer Umformung von einer n^3-Zahl in eine n^2-Zahl die «Prozess-Einheit $Zeit$" (Zeit, welche für die Raumveränderung nötig ist) substituiert wird, was durchaus zulässig ist, sofern der 3D-Körper als statisches Element betrachtet wird. Im Umkehrschluss setzt das aber voraus, dass für die Reduktion von einer 3D- auf eine 2D-Darstellung eine Einheitensubstitution möglich ist. Substitutionen sind möglich, sofern dadurch die Kohärenzbedingungen nicht verletzt werden.

Beispiel: Eine Quadratfläche n^2 = $n\mathcal{L}_y \cdot n\mathcal{L}_z$ kann durch Substitution in eine Länge k^1umgewandelt werden.

$$Substitution: n\mathcal{L}_y = n\mathcal{L}_z \rightarrow = n\mathcal{L}_y \cdot\ n\mathcal{L}_z =\ n^{2\mathcal{L}_y} = 1^{2\mathcal{L}_y} = 1 \cdot 2\mathcal{L}_y$$

$1 \cdot 2\mathcal{L}_y$ = $1 \cdot 2b$ ist eine teilbare Streckenlänge, wobei zwischen den beiden Streckenteilen keine Phasendifferenz vorhanden ist. (lässt sich $Rk\angle\pi$ Vektor auf der -x Achse vorstellen).

Die ursprüngliche Quadratzahl n^2- hat einen Phasenanteil von 2φ ($2\pi \; in \; der \; R - Darst.$)

Dieser Phasenanteil darf bei einer Substitution nicht einfach verloren gehen, weil sonst die Kohärenzbedingung verletzt würde. Weiter fällt auf, dass die Streckenlänge $1 \cdot 2b$ = $2b$ nicht zu einem Quadrat gefaltet werden kann, es sei denn, die Strecke 2b wird in vier Teilstrecken $4\frac{b}{2}$ geteilt. Phasenmässig unterscheidet sich diese zusätzliche Teilung nicht, weil alle vier Teilstrecken den gleichen Phasenwert aufweisen.

Der Zahl 1 in der Substitutionsform $1 \cdot 2\mathcal{L}_y$ kommt aber sehr wohl eine Bedeutung zu. Die Zahl 1 muss einen Phasenanteil aufweisen, damit das Produkt $1 \cdot 2\mathcal{L}_y$ den gleichen Phasenanteil 2φ wie die Quadratzahl n^2 aufweist.

Diese Bedingung lässt verschiedene Varianten zu:

Der Faktor $2\mathcal{L}_y$ kann als Kathete b auf einer Nny-Nulllinie interpretiert werden. Der Faktor 1 kann als Phasenwert $1\mathcal{L}_x = 1\pi$ interpretiert werden, was in der R-Darstellung als $\frac{1}{2}$ Kreisumfang abgebildet wird.

Bei einer ungenügenden Auflösung kann die Bogenlänge beziehungsweise der Punkt -1 auf dem Einheitskreis auch als Endpunkt des Kreisdurchmessers verstanden werden, welcher in der R-Darstellung mit den beiden Vektoren R1$\angle\pi$ + R1$\angle\pi$ definiert wird.

Diese beiden Vektoren bilden eine Länge und damit eine n^1 Zahl ab.

Eine Fläche kann mit diesem Vektorpaar nicht konstruiert werden, dazu müsste der Phasenwert auf 2π erhöht werden, damit die Vektoren zu einer Dreieckformation umgelegt werden können. Diese Umformung ist möglich, indem das Vektorpaar R1$\angle\pi$ + R1$\angle\pi$ in die Formation R1$\angle\frac{\pi}{4}$ + R1$\angle\frac{3\pi}{4}$ gelegt wird. Um eine Dreiecksfläche zu bilden, müsste jedoch die Durchmessersehne nicht einfach umgelegt, sondern kopiert werden, damit sie als Dreiecks-Hypotenuse erhalten bleibt.

Die beiden neu formatierten R1$\angle\frac{\pi}{4}$ + R1$\angle\frac{3\pi}{4}$ Vektoren würden damit eine Kathete a und b und die beiden Durchmesser R-Vektoren die Hypotenuse c eines Rechtecks bilden. Das Kopieren (Alle Datenpunkte * 2) ist als Quadratur zu verstehen, sie verdoppelt den Phasenanteil von π auf 2π und den Additionsanteil von $2 * \mathrm{R1} \; auf \; 4 * \mathrm{R1}$.

In der R-Darstellung verdoppelt diese Quadratur die Punkte auf dem Umkreis und verbessert damit die Auflösung auf dem Kreisumfang um den Faktor 2 (von 2 auf 4 Punkte).

Gleichzeitig wird ein neues Vektorpaar hinzugefügt so dass sich der Additionsanteil von $2\mathcal{L}_y$ auf $4\mathcal{L}_y$ erhöht.

Substitution einer 3D-Raumzahl in eine 2D-Flächenzahl

Innerhalb des Zn-Gültigkeitsbereiches kann auf dem Zylinderunterteil keine 3D-Zahl abgebildet werden. (Die grösste Zahl auf dem Zylinderunterteil wird mit dem Vektor Rn$\angle 2\varphi$ = R$\frac{n}{2}\angle 4\varphi$ = $(\frac{n}{2})^2$ beschrieben.

Eine 3D-Darstellung auf der Manteloberfläche einer Eulerrolle erfordert daher den Einbezug der Manteloberfläche des oberen Zylinderdeckels. Mit der xy-Fläche des Zylinderdeckels kommen die Einheiten $\mathcal{L}_z$ $[Zylinderhöhe]$ und $\mathcal{L}_t$ $[Zeit]$ dazu. Der Faktor Zeit führt auch zu einer neuen Eigenschaft: Der Zylinderdeckel beinhaltet eine dynamische Komponente.

Konkret: Die Eulerrolle kann grundsätzlich die Einheiten $\mathcal{L}_x,\ \mathcal{L}_y,\ \mathcal{L}_z\ und\ \mathcal{L}_t$ abbilden.

Dabei sind die beiden Einheiten $\mathcal{L}_y\ und\ \mathcal{L}_z$ gleichwertig und können substituiert werden $(1\mathcal{L}_y + \mathcal{L}_z = 2\mathcal{L}_y)$.

Die beiden Einheiten $\mathcal{L}_x\ und\ \mathcal{L}_t$ sind zahlenmässig gleichwertig und können direkt verglichen werden. Weg und Zeit sind über die Gleichung $Weg = v \cdot t$ verknüpft und daher gilt: $\mathcal{L}_x\ entspricht\ \mathcal{L}_t$. Das heisst: Für eine Wegstrecke von $1\mathcal{L}_x[m]$ braucht es $1\mathcal{L}_t[s]$.

Damit kann aus den beiden Einheiten $\mathcal{L}_z =$ und $\mathcal{L}_t$ ein S-Vektor $Sz\angle\varphi$ abgeleitet werden welcher auf einer Linie mit der Steigung $m = \frac{1\mathcal{L}_y}{1\mathcal{L}_x} = \frac{1}{\pi}$ liegt. Das ist die Steigung der P-Linie.

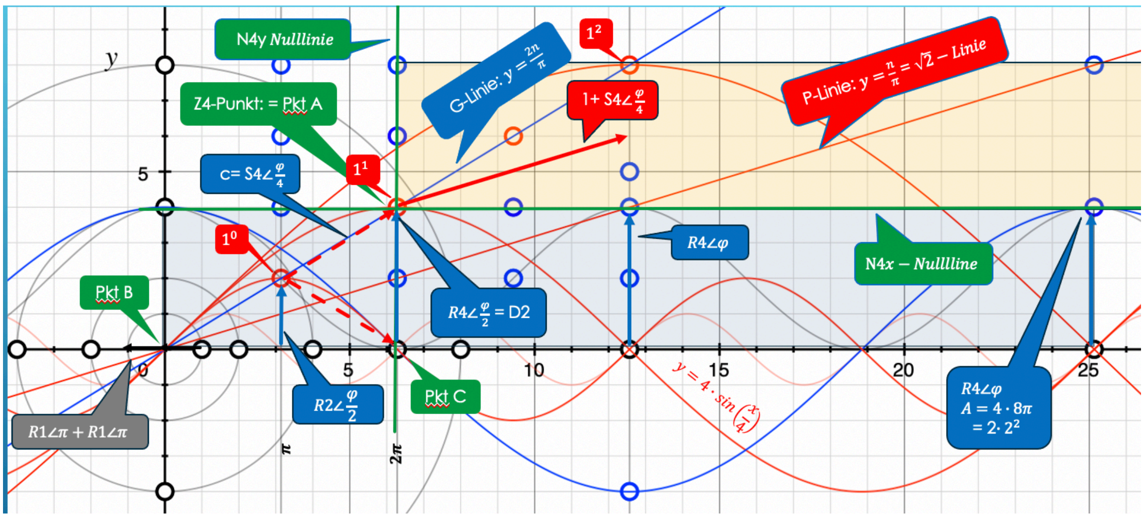


Bild 16: Vektoren auf statischem Zylinderunterteil und drehbarem -Oberteil.

Zahlen beim Wendepunkt von sin- und cos-Funktionen

Bild 16 zeigt, dass der Vektor R4$\angle\frac{\varphi}{2}$ auf der N4y-Nulllinie liegt und somit als n^1-Zahl die Länge $4\mathcal{L}_y$ abbildet. Dieser Vektor kann als b-Kathete des Dreiecks ABC interpretiert werden.

Der Abstand von Z4-Punkt zur y-Achse beträgt 2π und kann als a-Kathete des Dreiecks ABC interpretiert werden, welche durch 2 teilbar ist.

Die Diagonale des Rechtecks liegt auf der P-Linie mit einer Steigung $m = \frac{4\mathcal{L}_y}{2\mathcal{L}_x} = \frac{2}{\pi}$.

Auf dieser Linie liegen (n+n)-Zahlen und damit immer die Länge des R$\frac{n}{2} - Durchmesser$s.

Die Rechteckdiagonale liegt nicht auf der Nulllinie und bildet daher die Fläche $\frac{n^2}{2}\ ab$.

Die Länge der Hypotenuse kann jedoch mit $\sqrt{c} = \sqrt{a^2 + b^2}$ bestimmt werden.

Diese Länge muss kohärent zur Fläche $\frac{n^2}{2}$ sein.

In der R-Darstellung entspricht dies der der Fläche von 2 Quadranten.

Die Hypotenusenlänge ist ein Näherungswert für den halben Kreisumfang.

Verbesserung des Näherungswertes für die Bogenlänge

Durch eine Multiplikation kann nur die Bandbreite (Vektor auf der N4x-Achse) aber nicht die Auflösung verbessert werden. Die Auflösung kann mit zusätzlichen Additionstermen (mehr Punkte auf einem Halbkreis bzw. Kreisumfang) verbessert werden.

Multipliziert man eine Hypotenusenlänge, welche auf einer P-Linie liegt, steigt mit jeder Verdopplung der Additionsanteil sowie der Phasenanteil um den Faktor n an. Da der M-Teil gegenüber dem A-Teil dominant ist, kann aus den sin$\frac{\pi}{2}$- und cosπ- Anteilen folgende Reihe abgeleitet werden.

$$A = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots. \text{ (e-Reihe).}$$

Weitere Ausführungen dazu sind im in Kapitel 5.

3.3 Zusammenfassung Kapitel 3 / Erkenntnisse

Für die Z-Darstellung hat obige Erkenntnis folgende Konsequenzen: Der Phasengrösse n$\mathcal{L}_x$ kann immer einem Vektor $Rn\angle\pi$ zugeordnet werden.

Dieser Vektor bildet immer eine gerade Zahl (ein sin- und ein cos-Term). Die Addition eines (sin $(\frac{\pi}{2})$ und eines $cos(\pi)$ Terms ermöglicht die Bestimmung eines y- und eines x-Wertes, welche in der R-Darstellung gleich gross sind und somit substituiert werden können. Die Substitution $y + x = 2y = 2x$ lässt die Interpretation zu, dass mit diesen beiden Werten, der Kreisdurchmesser $D = 2r$ bestimmt ist.

Diese Länge kann als Vektorsumme $R\frac{n}{2}\angle\pi + R\frac{n}{2}\angle\pi = n^0$ verstanden werden.

Transformiert man diese Vektoren in die Z-Darstellung, erscheinen die Vektorsumme $R\frac{n}{2}\angle\varphi + R\frac{n}{2}\angle\varphi$ als $Rn\angle\frac{\varphi}{2}$-Vektor, welcher auf der N2y-Nullinie liegt und somit keinen Phasenanteil besitzt.

---

i

Besonderheit der R-Vektorbezeichnung in der Z-Darstellung

Ein Vektor mit der Phasenbezeichnung $Rn\angle\frac{\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{2}}$ liegt immer auf einer Nny-Nulllinie. Damit besteht ein $Rn\angle\frac{\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{2}}$ Vektor nur aus einem Additionsanteil, sein Phasenanteil ist Null.

Ein $Rn\angle\frac{\varphi}{2}$ Vektor ist in der R-Darstellung immer eine j-Vektor.

Diesem Vektor kann immer die Fläche eines Quadranten ($\frac{r^2\pi}{4}$) und eine Bogenlänge $\frac{U}{4} = \frac{2r\cdot\pi}{4}$ zugewiesen werden.

In der Z-Darstellung wird die Bogenlänge nur näherungsweise mit $r\sqrt{2}$ abgebildet, da die Auflösung bescheiden ist. Bei einer sehr grossen Auflösung wird die Bogenlänge als Summe von sehr vielen kleinen $S1\angle\frac{\varphi}{4}$ Kreis-Tangentenvektoren zusammengesetzt.

Für $n \to \infty$ $gilt: Abweichung\ des\ Näherungswertes\ zur\ Bogenlänge = Null.$

In diesem Fall wächst der Additionsanteil auf die Länge e an.

Durch eine Multiplikation 2* $Rn\angle\frac{\varphi}{2}$ = $Rn\angle\varphi$ entsteht eine vollwertige Zahl n^1mit je zwei vollen $\frac{n}{2}sin - und\ \frac{n}{2}cos - Perioden.$

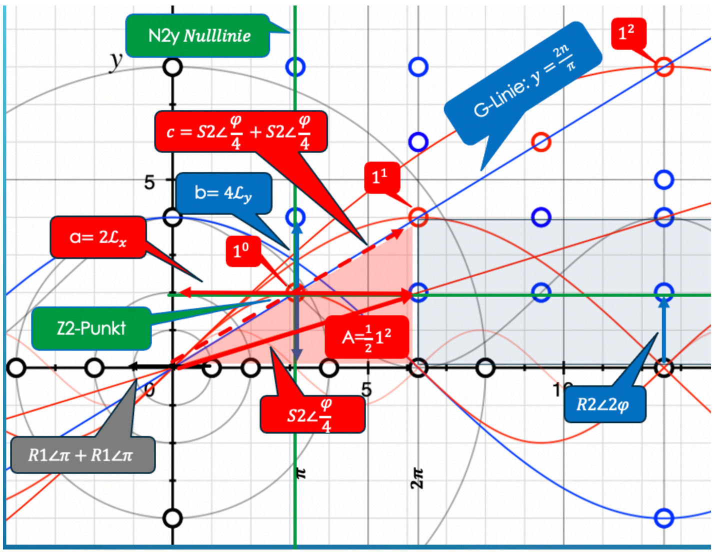
Zudem gilt: Jede Zahl n^1ist durch n teilbar. Damit haben alle Zahlen einen gemeinsamen Ursprungsvektor 1^1 (Ursprungslänge und -Phase) bzw. 1^0 (Ursprungslänge).

- n^1 kann somit auch als n^{x+y} geschrieben werden (x für Real- und y für Imaginärteil).
- n^2 wird immer durch den Vektor $Rn\angle 2\varphi$ abgebildet.

Entsprechend kann n^2= $n^{2(x+y)}$ geschrieben werden.

Eine n^3-Zahl erscheint immer auf dem Zylinderdeckel und kann als Summe von der Basiszahl 1 und einer $n^2 - Zahl$ verstanden werden.

Dabei wird die $n^2 - Zahl$ mit einem S-Vektor abgebildet, welcher auf einer P-Linie liegt.



Beispiel für n^2-Darstellung:

Der Z2-Punkt ist der transformierte R2-Kreismittelpunkt.

Die b-Kathete ($4\mathcal{L}_y$)entspricht dem $\pm y$ - Wert des R2-Kreises

Die a-Kathete ($2\mathcal{L}_x$) entspricht dem $\pm\pi$ - Wert des R2-Kreises (Näherungswert, min. Auflösung).

Aus den beiden Katheten lässt sich das rote Dreieck konstruieren mit der Hypotenuse c.

Bild 17: Flächenumwandlung:

Die Hypotenuse c liegt auf der G-Linie (G steht für gerade Zahl $n + n$) mit der Steigung $m = \frac{2\mathcal{L}_y}{\mathcal{L}_x}$. Transformiert man die G-Linie zurück in die R-Darstellung, wird sie als y-Achse abgebildet.

Die rote Dreieckfläche kann in ein flächengleiches Rechteck umgeformt werden, welches mit dem Vektor $R2\angle\varphi$ beschrieben werden kann.

Die Hypotenuse dieses Rechtecks liegt auf der P-Linie mit der Steigung $m = \frac{\mathcal{L}_y}{\mathcal{L}_x} = \frac{1}{\pi}$.

Transformiert man die P-Linie zurück in die R-Darstellung, wird sie als 45^0-Sehne (r$\sqrt{2} - Linie$) abgebildet. Diese Sehne liegt auf einer Linie mit der Steigung -$m = \frac{1}{1}$.

Vergleicht man die Fläche n^2= $n^{2(x+y)}$, ist folgende Aussage möglich:

- Der Exponent (x+y) zeigt, dass es sich um einen Sehnenvektor handeln muss, welcher auf der P-Linie liegt.
- Der Exponent 2(x+y) zeigt, dass die Sehne c verdoppelt werden muss, um eine Quadratfläche (Rechteckfläche) abbilden zu können.
- x+y bilden somit die beiden Katheten a und b ab.

Kapitel 4 bis 8 sind nicht mehr Gegenstand der Patenteingabe.
Die ganze Arbeit gemäss Inhaltsverzeichnis kann bei Bildungsprojekte bezogen werden.

Der ganze Artikel beinhaltet die Beschreibung von komplexen math. Funktionen, welche mit der Eulerrolle abgebildet werden können.

Für Fragen zum ganzen Projekt stehen wir gerne zur Verfügung.
Die Version 7 beinhaltet verschiedene Beweise, welche mit Hilfe der Eulerrolle hergeleitet werden können.

Eine Version 8 des vollständigen Berichtes ist in Bearbeitung. Version 8 ist primär eine mathematische Beschreibung und damit wird sich der strukturelle Aufbau stark ändern.
Für die Patentanmeldung wird die Version 8 kaum von Bedeutung sein.
Bereits die Version 7 liefert dazu die geforderten Grundlagen.

Hüttwilen, 31. März 2021 / hpz