Die Eulerrolle
Ein didaktisches Hilfsmittel für einen einfacheren Zugang zur Mathematik

Was ist Mathematik und warum sollte uns das interessieren?

Mathematik ist Mustererkennung.
Je genauer wir ein Muster beschreiben können, umso besser sind wir in der Lage, Prognosen über ein zukünftiges Verhalten machen zu können. Somit lassen sich Warnsignale in unserem Umfeld besser erkennen, was uns einen Hinweis geben kann, wie wir optimal auf Gefährdungen reagieren können.

Mathematik ist damit Alltag. Regelmässig sind wir mit neuen Situationen konfrontiert, welche schnelle Entscheidungen erfordern. Dabei stützen wir uns auf unsere Erfahrungen, beziehungsweise auf uns bekannte Muster, welche uns mögliche Risiken oder Chancen abschätzen lassen.

Mathematik ist mit Abstand die genauste Mustererkennung, die wir kennen. Allerdings setzt diese «Sprache» bestimmte Formulierung voraus, welche, wie eine Fremdsprache, gelernt werden muss. Zusammenhänge und Prozesse lassen sich mit speziellen mathematischen Symbolen beschreiben, welche eine subjektive Interpretierung ausschliessen. Bei verbalen Beschreibungen ist dies in der Regel nicht der Fall. Hier muss immer differenziert werden, was eine Botschaft beinhaltet und wie sie interpretiert wird. Diese Interpretation ist jeweils eng verknüpft mit der emotionalen Betroffenheit und damit subjektiv. Eine mathematische Formulierung hat jedoch auch Nachteile. Sie ist sehr abstrakt und nur bedingt zugänglich. Damit Prozesse allgemein verständlich erklärt werden können, ist eine ergänzende verbale Beschreibung (heuristische Beschreibung) oft sinnvoll. Zudem setzt jede Erkenntnis ein Grundverständnis voraus, damit überhaupt eine Übersetzung in die mathematische Formulierung möglich ist. Eine heuristische Beschreibung und eine mathematische Formulierung sind somit als sich gegenseitige ergänzende Methoden zu betrachten.

Die Auseinandersetzung, wozu Mathematik gut ist, sollte daher am Anfang und nicht am Ende eines Studiums stattfinden. Wird der Nutzen der «Fremdsprache Mathematik» nicht erkannt, darf auch keine breite Begeisterung für dieses Fach erwartet werden.

Mathematik ist eine abstrakte Sprache, das gilt auch für Grundoperationen

Welche Aussage steckt hinter einer Zahl?
Eine Zahl für sich ist bedeutungslos. So steckt zum Beispiel hinter der Zahl 5 erst eine Aussage, wenn sie in Bezug zu einer anderen Grösse, zum Beispiel einer Einheit, gebracht wird. Das heisst, dass eine konkrete Vorstellung erst möglich ist, wenn eine Zahl mit einer Einheit, zum Beispiel einer Länge oder einer Sache verknüpft wird. Erst mit diesen Vorstellungen machen mathematischen Operationen einen Sinn. So lassen sich zum Beispiel 6 Flaschen unter 3 Personen aufteilen $(\frac{6}{3})$ oder man kann 4 Flaschen von 6 Flaschen subtrahieren.
Mit beiden Operationen erhält man die gleiche Zahl 2. Die Mathematik formuliert dazu Vorschriften, damit solche Ergebnisse allgemein gültig werden. Allgemein heisst in diesem Zusammenhang, dass auch negative Zahlen zugelassen werden, was zu abstrakten

Ergebnissen führen kann. Wie soll ein Resultat wie 4 Flaschen – 6 Flaschen interpretiert werden? Noch abstrakter wird es bei der Division und $6 \div 0$ gilt sogar als «verbotene» Operation, weil $\frac{6}{0} = \infty$ *(Das Symbol* ∞ *steht für eine undliche grosse Zahl).*
Unendlich ist eine Zahl, zu der wir keine intuitive Beziehung haben, was dazu führt, dass zum Beispiel das Ergebnis $\frac{6}{0} = \infty$ nur schwer nachvollziehbar ist.
So ist auch die Aussage «$\infty + 6 = \infty$" oder «$\infty + 1 Million = \infty$" nicht leicht verständlich, aber korrekt. Solche Fragestellungen gehören in den Fachbereich der Zahlentheorie und damit zur höheren Mathematik.

Bereits im Alltag gibt es jedoch viele Beispiele, die aufzeigen, dass wir bei verbalen Formulierungen oft sehr ungenau sind, oder stillschweigend davon ausgehen, dass gewisse Randbedingungen klar sind. So mag eine Bestellung wie «bitte bringen sie mir 6 Flaschen» in einem bestimmten Kontext sehr wohl verständlich sein, aber eine allgemeine Verständlichkeit kann dieser Bestellung nicht zugeschrieben werden. Eine bessere Formulierung wäre «bitte liefern sie 6 Liter Bier». In diesem Fall wird ein konkretes Volumen bestellt, wobei diesem Mass eine Länge, Breite und Höhe und damit einer Zahl mit drei Dimensionen x, y *und* z zugeordnet werden kann.
Dieses Volumenmass kann man sich als zylinderförmiges Gefäss mit einem Durchmesser und einer bestimmten Höhe vorstellen, wobei sich das Volumen mit der Formel $V = Grundfläche \cdot Höhe = r^2\pi \cdot h$ berechnen lässt. Dabei fällt auf, dass die Anzahl der bestellten «Flaschen» in dieser Berechnung nicht mehr enthalten ist. Mit anderen Worten: Setzt man das Bestellvolumen $6*1dm^3$voraus, kann diese Menge in einem Gefäss mit entsprechender Grundfläche und Höhe geliefert werden. Dabei kann die Zahl 6 nicht mehr explizit einer x, y oder z-Dimension zugeordnet werden, weil anstelle von 6 Flaschen nur noch ein Gefäss geliefert wird, welchem man einen beliebigen Nahmen, zum Beispiel «Fass» zuschreiben kann. In der Mathematik wird ein solcher «Namenswechsel» als Substitution bezeichnet. Der Vorteil einer solchen Substitution liegt darin, dass eine Berechnung einfacher wird. Im erwähnten Beispiel wird die Multiplikation $v^3 \cdot 6$ durch $V^3 \cdot 1 = V^3$ ersetzt.

Das Besondere an solchen Substituierungen ist jedoch, dass eine n-dimensionale Zahl x in eine (n-1)-dimensionale Zahl transformiert werden kann. Dabei können sich jedoch fundamentale Zahlen-Zuschreibungen ändern. Substituiert man zB. ein 3-dimensionales Volumen in ein 2-dimensionale Fläche, wird die Bierbestellung völlig unsinnig, weil Bier nicht auf einer ebenen Fläche serviert werden kann.
Trotzdem lässt sich jeder Volumenzahl x^3 eine Flächenzahl x^2 (Kreisfläche Flaschenboden) zuordnen und jedem Flaschenboden lässt sich eine Kreisfläche und ein Kreisumfang zuordnen. Für jede Volumenzahl xyz gilt die Bedingung, dass keine der drei Dimensionen Null ist. Das lässt sich auch anders formulieren: Wenn eine der drei Dimensionen, zum Beispiel die Höhe $z = 0$ ist, muss das Produkt $xy = \infty$ sein. Eine 3D-Zahl kann also sehr wohl auf eine 2D-Zahl reduziert werden, aber die dazu notwendige Fläche muss unendlich gross, sein, um diese Zahl abzubilden.
Diese Aussage gilt, wenn von einem unendlich grossen Zahlenraum ausgegangen wird, was in der Regel stillschweigend angenommen wird.
Geht man von einem begrenzten Zahlenraum aus, ist es durchaus möglich, dass man auch eine Zahl x^3, *also zum Beispiel* 3^3 auf einer Fläche abbilden kann. Am einfachsten lässt sich das mit einem Würfel der Seitenlänge 1m vorstellen, dessen Volumen xyz mit der Zahl 1^3

beschrieben werden kann. Dieser Würfel kann auf einer 2D-Fläche als kreuzförmige Abwicklung von 6 Würfelseiten abgebildet werden ($6 \cdot 1^2$) und jede Würfelseite kann als Abwicklung von 4 Quadratseiten abgebildet werden, was eine Zerlegung ($6 \cdot 4 \cdot 1^1$) ermöglicht. Daraus lässt sich schliessen, dass es zur Zahl 1^3 eine äquivalente Zahl ($6 \cdot 1^2$) und eine äquivalente Zahl ($24 \cdot 1^1$) gibt.

Diese Erkenntnis lässt bereits einen sehr abstrakten Schluss zu:
Jeder 3D-Zahl x^3 kann eine Zahl x^2und eine Zahl x^1zugeordnet werden. In mathematischer Formulierung heisst das: Die Zahlen $x^1, x^2 \; und \; x^3$ haben die gleiche Mächtigkeit.
Somit gibt es gleich viele natürlichen Zahlen wie Quadratzahlen und kubische Zahlen.
Diese Aussage widerspricht unserer Intuition und ist daher irritierend (aber richtig).

Die natürlichen Zahlen
Um den oben erwähnten Zusammenhang besser zu verstehen, kann man sich auf die natürlichen Zahlen $n = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ beschränken. Dieser Ansatz empfiehlt sich, wenn man sich auf eine Abbildung von Zahlen auf einer begrenzten Würfeloberfläche befasst.
In diesem Fall muss sich die Flächenzahl $6 \cdot 1^2$ auf der Würfeloberseite abbilden lassen Dabei kann das Produkt $6 \cdot 1^2$ als Summe von Würfelseiten ($1^2 + 1^2$ +1^2 +1^2 +$1^2 + 1^2$) dargestellt werden. Aufgrund der Mächtigkeit muss dieser Fläche auch eine Länge $24 \cdot 1^1$ zugeordnet werden können, was aber eine weitere Substitution erfordert, welche in der Patentschrift beschrieben ist. Daraus geht hervor, dass über den Umfang der sechs Quadrate mit der Fläche 1^1 eine Gesamtlänge $l = 4 \cdot 6$ abgebildet werden kann. Voraussetzung ist, dass die abgewickelte Würfeloberfläche in ein gleichflächiges Rechteck transformiert wird.
Das zwischen diesen Längenzahlen (1D) und den Flächenzahlen (2D) auf einer Würfeloberfläche auch Wurzelbeziehungen (Satz von Pythagoras) ersichtlich werden, ist nachvollziehbar. Ebenfalls nachvollziehbar ist, dass hinter dem Satz von Pythagoras eine Beziehung zwischen ganzzahligen Additionen und Multiplikationen ersichtlich sind.
Weiter können auch Zusammenhänge erkannt werden, welche an den Mathematikunterricht erinnern, aber nicht unbedingt leicht verständlich sind. Beispiel:

Die Zahl 2^3 $steht\ f$ür $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
Die Zahl 2^2 $steht\ f$ür $2 \cdot 2 = 4$
Die Zahl 2^1 $steht\ f$ür $2 = 2$
Die Zahl 2^0 $steht\ f$ür 1 ($und\ nicht\ f$ür $Null$)

Das ist nicht einfach so definiert, dahinter steht ein bestimmtes Muster von 3D-Zahlen. Solche Muster können mit der Eulerrolle relativ einfach aufgezeigt werden. Dahinter steckt ein 3D-Zylindermodell, welches dank seiner speziellen Bauform diese Muster erkennen lässt.

Der imaginäre Zahlenraum
Wird für die Volumenberechnung anstelle eines Würfels ein Zylinder gewählt, unterscheiden sich die Boden- und Deckenfläche von der Zylindermantelfläche. Die quadratische Bodenfläche des Würfels kann in eine kreisförmige Zylinderbodenfläche transformiert werden, dessen Fläche sich mit $r^2\pi$ berechnen lässt. Dabei kann das Produkt r^2 mit zwei Radius-Vektoren, einer auf der x-Achse und ein zweiter auf der senkrecht dazu stehenden y-Achse berechnet werden. Jedem Punkt auf dem Kreisdurchmesser kann damit ein x- und ein y-Koordinate zugeordnet werden. Diese Kreisdarstellung wird in der Mathematik als imaginärer Zahlenraum bezeichnet, wobei der x-Wert als Realteil und der y-Wert Imaginärteil einer Zahl bezeichnet wird. Diese Darstellung ermöglicht Aussagen zu

trigonometrischen Zusammenhängen sowie auch zur Vektordarstellung von Zahlen. Bereits in diese Darstellung lassen sich auch Besonderheiten von Primzahlen aufzeigen. So kann innerhalb eines Kreises mit einem Radius $r = 5cm$ eine maximale Länge von $2r = 10cm$ (Durchmesser) abgebildet werden. Beschränkt man sich auf die Abbildung von natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ heisst das, dass nur die Primzahl 2 einen Kreisdurchmesser abbilden kann, alle weiteren Primzahlen sind nicht durch 2 teilbar, was bei einem Kreisdurchmesser aber gefordert ist.
Generell gilt: eine nicht ganzzahlige Sehnenlänge, ist eine gefaltete Primzahl.
Allerdings gibt es Ausnahmen, dazu gehören die Zahlen 1 und 2, sowie die Zahlen e und π
Dabei ist π mit den unendlich vielen Nachkommastellen eine sehr interessante Zahl und birgt immer noch Geheimnisse. Dazu gehört zB. die Frage: Wie gross ist π^2? Man könnte vermuten, dass dies einfach zu beantworten ist, nämlich 3,141…$\cdot$ $3{,}141$ … = 9.869… Das entspricht dem Ergebnis, welches ein Taschenrechner liefert, aber dieses Resultat stimmt nicht, weil der Taschenrechner nicht mit unendlich langen Nachkommastellen umgehen kann. Der gleichen Fehlerkategorie lässt sich die Aussage $1^2 = 1$ zuordnen. Auch diese Aussage ist nicht korrekt, weil eine Länge (1D-Zahl) nicht mit einer Flächenzahl (2D-Zahl) gleichgesetzt werden kann.
Die Beispiele zeigen, dass mathematische Formulierungen sorgfältig geprüft werden müssen. Wird dies befolgt, ist die Mathematik ein äusserst wertvolles Instrument für gute Prognosen und Entscheidungen. Damit man jedoch dieses Instrument richtig anwenden kann, ist ein gutes Verständnis wichtig, weil die Gefahr besteht, dass man mit einem Halbwissen fundamentale Fehler machen kann, die nicht ohne weiteres erkennbar sind.

Die Eulerrolle

Die Eulerrolle ist ein teilbarer Zylinderkörper, bestehend aus einem statischen Zylinderunterteil und einem verdrehbaren Zylinderoberteil (Deckel). Diese beiden Zylinderteile sind über eine Schraubenlinie miteinander verbunden. Dabei ist die Geometrie des Zylinders so gewählt, dass die Zahlen 1, 2, e und π auf einer Schraubenlinie mit einer Steigung $m = \frac{2}{\pi}$ zu liegen kommen.
Anmerkung: Auf der Eulerrolle liegen alle Primzahlen auf einer Schraubenlinie.

Bei dieser Zylindergeometrie lässt sich der Zylinderdeckel durch eine Vierteldrehung vom Zylinderunterteil trennen. Während der Drehbewegung verschiebt sich die ganze Mantelfläche des Zylinderoberteils entlang der Schraubenlinie mit der Steigung $m = \frac{2}{\pi}$.
Damit lässt sich eine Beziehung herstellen zwischen dem Ort des oberen Zylinderdeckels und der Zeit, welche eine Drehbewegung in Anspruch nimmt.

Dimensionalität der Abbildungen

Der Zylinderunterteil hat eine Mantelfläche, welcher die Koordinaten $x\ und\ y$ zugeordnet werden können. Diesen Koordinaten können die Real- und Imaginärwerte einer Zahl zugeordnet werden. Das führt dazu, dass Punkte auf einem Kreisumfang (Zylinderboden) auf eine Rechteckfläche (Mantelfläche) transformiert werden können.
Im verschraubten Zustand liegt die Mantelfläche des Zylinderoberteils direkt auf der Mantelfläche des Zylinderunterteils und damit am gleichen Ort.
Öffnet man den Zylinderdeckel, vergrössert sich die Gesamthöhe des Zylinders und die Öffnungszeit ist proportional zur x-Verschiebung. Das erlaubt, dass die Mantelfläche des

Oberteils als $zt - Fläche$ interpretiert werden kann. Somit lassen sich auf der Eulerrolle die Raumkoordinaten xyz sowie die Zeitkoordinate t abbilden (RaumZeit).
Damit kann mit der Eulerrolle nicht nur die Mächtigkeit der Zahlen $1^1, 1^2$ und 1^3aufzeigen, es kann auch aufgezeigt werden, dass auch die Zahl 1^4 die gleiche Mächtigkeit haben muss.
Damit ist die Eulerrolle auch ein geeignetes Hilfsmittel, um einen einfacheren Zugang zur höheren Mathematik zu bekommen. Dazu gehört zB. die Fourier-Transformation oder der Goldene Schnitt.
Diese Zylinderkonstruktion ermöglicht auch einen Zugang zur Eulerrelation für die gilt:

$$e^{j\pi} - 1 = 0$$

Diese Formel wird in der Literatur oft als schönste Formel bezeichnet. Ohne geeignete Abbildungsmodelle ist die Eulerrelation schwer nachvollziehbar.
Die Bezeichnung dieses Zylinder-Modells basiert auf diesem Zusammenhang.

Ein didaktisches Modell wie die Eulerrolle muss den Zweck erfüllen, dass komplexe Zusammenhänge wie die Eulerrelation einfach erklärt werden können. Lehrer und Dozenten sollten mathematische Zusammenhänge möglich einfach und nicht möglichst kompliziert erklären. Der komplizierte Ansatz hat zwar den «Vorteil» dass die Schüler keine Fragen stellen, weil sie nichts verstanden haben. Die Eulerrelation hat einen Bezug zu einer 3D-Zahl und kann daher einfacher mit einem 3D-Modell erklärt werden als mit einem 2D-Modell, wie zum Beispiel der Rechenschieber (Museums-Modell).

Kurzerklärung zur Eulerrelation:
Ein Gast kommt in ein Restaurant und bestellt e Flaschen $\pi Bierli$
Das Restaurant hat jedoch das $\pi Bier$ nur im Offenausschrank und nicht in Flaschen.
Der Kellner füllt daher das πBier in **eine** Vase ab und kann so die bestellte Menge Bier servieren. Diese Vase hat eine Höhe $z = e$ und einen Durchmesser $D = 2\pi$.
Wir diese **eine** Vase gefüllt, liefert der Kellner exakt die bestellt Biermenge $\mathbf{1} \cdot V^3$.
Drink ein anderer Gast diese Vase aus, bleibt dem Besteller 0 Bier übrig.
(Herleitung: s. Script «Primzahlen, die Eulerrolle und Goldbach»).

Die Goldbachvermutung
Ein besonderer Vorteil der Eulerrolle ist die Möglichkeit, dass auf ihrer Manteloberfläche auch Erkenntnisse zur Goldbachvermutung ablesbar sind. Im Gegensatz zur Eulerrelation gilt gehört die Goldbachvermutung noch zu den ungelösten Fragen der Mathematik. Eine heuristische Beschreibung dieser Vermutung kann im besten Fall eine verbale Erklärung liefern. Für einen Beweis benötigte es dazu aber noch eine mathematische Formulierung aller Abbildungsvorschriften. Für didaktische Zwecke sind jedoch mathematische Beweise nur noch bedingt geeignet.

Hüttwilen, 16. Juni 2021 / Hanspeter Zehnder